



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

UNA VERSIONE METRICA
DEL TEOREMA DI CARTAN-HADAMARD

Relatore:
Dott. *Roberto Frigerio*

Candidato:
Luigi Caputi

ANNO ACCADEMICO 2011–2012

Indice

Introduzione	v
1 Spazi $CAT(\kappa)$	1
1.1 Cammini e geodetiche in spazi metrici	2
1.2 Spazi di lunghezze	5
1.3 Rivestimenti	11
1.4 Curvatura per spazi metrici geodetici	16
2 Il teorema di Cartan-Hadamard	21
2.1 Convessità	21
2.2 Verso il Teorema di Cartan-Hadamard	24
2.3 La mappa esponenziale	28
2.4 Una caratterizzazione degli spazi $CAT(\kappa)$	32
2.5 Il patchwork di Alexandrov	37
3 Applicazioni topologiche	41
3.1 Gruppo fondamentale e dimensione di spazi $CAT(\kappa)$	41
3.2 Il centro di un insieme limitato	43
Bibliografia	45

Introduzione

La teoria degli spazi metrici a curvatura non positiva nasce negli ultimi decenni dell'Ottocento con i lavori pionieristici di Hadamard, primo tra tutti "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques" del 1898. Da allora fino ad oggi, gli spazi a curvatura non positiva sono stati oggetto di ricerca di moltissimi matematici, tra i quali possiamo citare ad esempio, per l'importanza dei contributi che essi diedero allo sviluppo della disciplina, Busemann, Alexandrov e Gromov. In particolare, a partire dai lavori di Alexandrov, si vide la possibilità di estendere concetti e risultati propri della geometria differenziale delle varietà al contesto più generale degli spazi metrici. Tra tali concetti vi sono ad esempio le nozioni fondamentali di geodetica e curvatura.

In questa tesi ci concentreremo sull'estensione al caso di spazi metrici di un importante teorema che lega la topologia alla curvatura delle varietà, il Teorema di Cartan-Hadamard.

La versione del teorema nel contesto degli spazi metrici afferma che, se la metrica definita su uno spazio topologico X semplicemente connesso è localmente convessa e completa, allora lo spazio X è contraibile. Più in particolare, si dimostrerà che uno spazio a curvatura non positiva X ammette come rivestimento universale uno spazio contraibile, e tale spazio, dotato della metrica di lunghezze indotta da X , risulterà ancora a curvatura non positiva.

Per dare l'enunciato e la dimostrazione di questo teorema, si introdurranno nel primo capitolo della trattazione alcune nozioni fondamentali in geometria metrica: si darà la nozione di geodetica come curva localmente minimizzante, e la relativa nozione di spazio geodetico come spazio in cui ogni coppia di punti è connessa da una geodetica. Si definirà poi una classe di spazi metrici fondamentale per lo sviluppo della teoria, gli "spazi di lunghezze"; tali spazi hanno una particolare struttura metrica, detta metrica di lunghezze, definita come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che connettono due punti fissati. Si mostrerà poi come sollevare la struttura metrica di uno spazio di lunghezze ad un suo rivestimento, e si dimostrerà l'analogo metrico di un altro teorema classico in geometria differenziale, il Teorema di Hopf-Rinow. Si concluderà il capitolo con una nozione di curvatura limitata superiormente per uno spazio metrico; delle differenti definizioni introdotte da Alexandrov, tutte equivalenti, daremo quella sistematizzata da Gromov usando la divergenza delle geodetiche. Si fisserà una superficie a curvatura

costante, da scegliersi tra i modelli metrici di sfera, piano, e piano iperbolico; per ogni triangolo geodetico nello spazio metrico iniziale si costruiranno dei triangoli di confronto nella superficie fissata, e a seconda della relazione tra la divergenza delle geodetiche nei triangoli originari e i relativi triangoli di confronto si darà una condizione sulla metrica affinché lo spazio possa esser considerato a curvatura nulla, positiva o negativa. Se con questa definizione lo spazio X risulta a curvatura minore o uguale a κ , diremo che tale spazio è $CAT(\kappa)$, in onore di Cartan, Alexandrov e Toponogov.

Nel secondo capitolo si parlerà di funzioni e metriche convesse, e si dimostrerà che ogni spazio $CAT(\kappa)$, per κ non positivo, è contraibile. Si procederà con la definizione dello spazio tangente come spazio delle geodetiche locali su uno spazio metrico X di punto base fissato $x_0 \in X$, e con la definizione di mappa esponenziale, definita come un'applicazione sullo spazio tangente a valori in X ; tale applicazione assocerà ad ogni geodetica il rispettivo estremo finale, e si dimostrerà che tale mappa, nelle ipotesi del Teorema di Cartan-Hadamard, è un rivestimento; più in particolare, dimostreremo che lo spazio tangente è contraibile, e dunque è proprio il rivestimento universale di X . Dopo aver introdotto il patchwork di Alexandrov, si darà una dimostrazione completa del teorema.

Si concluderà infine la tesi con alcune applicazioni in ambito topologico. Per esempio si dimostrerà che il gruppo fondamentale di una varietà a curvatura non positiva determina la dimensione della varietà stessa, e non può contenere elementi non banali di ordine finito.

Capitolo 1

Spazi $CAT(\kappa)$

Gli assiomi che definiscono uno spazio metrico permettono di modellizzare il concetto di distanza tra punti e di lunghezza di curve. In particolare, queste nozioni ci permettono di parlare di curve localmente minimizzanti e di triangoli geodetici; da qui è poi possibile giungere ad una definizione di curvatura per spazi metrici arbitrari, nozione introdotta da Alexandrov in un articolo del 1957, poi riformulata da Gromov con la formalizzazione degli spazi $CAT(\kappa)$.

Il seguente capitolo introdurrà tali concetti base, dando gli strumenti essenziali per la dimostrazione del teorema di Cartan-Hadamard, che studieremo nel secondo capitolo.

Prima di cominciare la trattazione richiamiamo dunque le definizioni base di metrica e di isometria.

Definizione 1.1 (Metrica). Una *pseudometrica* su un insieme X è una mappa d definita su $X \times X$ a valori nei numeri reali positivi tale che per ogni $x, y, z \in X$ si abbia:

- i. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, x) = 0$;
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La funzione d è detta *metrica* se per ogni $x \neq y$ si ha $d(x, y) > 0$.

La coppia (X, d) , con d metrica, è detta *spazio metrico*.

Definizione 1.2 (Isometria). Una *isometria* tra due spazi metrici (X, d) e (X', d') è una mappa bigettiva $f: X \rightarrow X'$ tale che

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Se una tale mappa esiste X e Y saranno detti *isometrici*.

Definizione 1.3 (Isometria locale). Siano X e Y due spazi metrici. Una mappa f tra X e Y è detta *isometria locale* se f è suriettiva e per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno $V(x)$ tale che $f(V(x))$ è un intorno di $f(x)$ in Y e la restrizione di f a $V(x)$ è un'isometria tra $V(x)$ e $f(V(x))$.

1.1 Cammini e geodetiche in spazi metrici

Un concetto chiave per lo studio delle varietà riemanniane è quello di geodetica, una curva con vettore tangente sempre parallelo. In quel contesto, le geodetiche dipendono in modo differenziale dalle condizioni iniziali, e per ogni punto della varietà la scelta di un vettore individua un'unica geodetica tangente al vettore assegnato. Nel caso di spazi metrici generali però, non ha senso parlare di spazio tangente, e la corretta nozione di geodetica che useremo si basa sulla proprietà di (locale) minimizzazione della lunghezza, proprietà che ammette una descrizione nei soli termini della metrica.

In tutto il capitolo considereremo dunque fissato uno spazio metrico $X = (X, d)$. Procediamo ora con la definizione chiave di geodetica:

Definizione 1.4. Una *geodetica* tra due punti x, y di X è una mappa continua γ da un intervallo chiuso $[0, l]$ di \mathbb{R} in X con $\gamma(0) = x, \gamma(l) = y$ e tale che

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, l].$$

Osserviamo che, in particolare, l è la distanza in X tra x e y .

Analogamente possiamo considerare le geodetiche come mappe definite su un intervallo I di \mathbb{R} . Se tale intervallo di definizione è finito diciamo anche che γ è un *segmento geodetico* tra x e y , mentre chiamiamo rispettivamente *raggio geodetico* e *linea geodetica* una geodetica che abbia dominio $[0, +\infty[$ o tutto \mathbb{R} .

Segue subito dalla definizione che segmenti, raggi e linee geodetiche sono mappe iniettive e che la restrizione di una geodetica ad un sotto-intervallo chiuso del suo dominio è ancora una geodetica.

Definizione 1.5. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; diciamo che $\gamma: I \rightarrow X$ è una geodetica linearmente riparametrizzata se esiste una costante λ tale che $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \lambda|t_1 - t_2|$ per ogni t_1, t_2 in I .

Sotto le stesse ipotesi diremo che la geodetica γ parametrizza la sua immagine proporzionalmente alla lunghezza d'arco.

Definizione 1.6. Una *geodetica locale* in X è una mappa definita su un intervallo I a valori in X tale che

$$\forall t \in I \exists \varepsilon > 0 : d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \text{ per cui } |t - t_1| + |t - t_2| \leq \varepsilon$$

o, equivalentemente, tale che per ogni t possiamo trovare un intorno $I(t)$ tale che la restrizione di γ a $I \cap I(t)$ sia una geodetica.

Diciamo che lo spazio (X, d) è *geodetico* se per ogni coppia di punti di X esiste un segmento geodetico tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Diciamo invece che è *unicamente geodetico* se ogni coppia di punti ammette esattamente un'unica geodetica che li congiunge; è *localmente unicamente geodetico* se per ogni punto $x \in X$ esiste un numero positivo r tale che la palla $B(x, r)$ è unicamente geodetica, con geodetiche tutte contenute in $B(x, r)$.

Definizione 1.7. Un sottospazio $C \subseteq X$ è detto *convesso* se per ogni coppia di punti x, y in C ogni segmento geodetico che li congiunge ha traccia contenuta in C .

Diamo ora qualche esempio di spazio geodetico:

Esempio 1.8. (i) Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n è unicamente geodetico per ogni $n \geq 0$; infatti per ogni x, y l'unica geodetica linearmente riparametrizzata tra x e y è data da $t \rightarrow (1-t)x + ty$, con $t \in [0, 1]$.

(ii) Se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale normato, la norma induce una distanza che lo rende uno spazio geodetico. Come nel caso euclideo, i segmenti rettilinei sono geodetiche, ma essi sono le uniche geodetiche solo nel caso in cui la palla unitaria sia strettamente convessa.

(iii) Per ogni $n \geq 0$ la sfera S^n (dotata della metrica intrinseca, che definiremo nella prossima sezione) è geodetica, con geodetiche date da archi di cerchi massimi.

(iv) Per ogni $n \geq 2$ lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n è geodetico.

Ricordiamo ora che per curva, o cammino, si intende una funzione continua $c: [a, b] \rightarrow X$. Se c_1, c_2 sono due curve di domini $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$, tali che $c_1(b_1) = c_2(a_2)$, definiamo la loro *giunzione* come il cammino $c: [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X$ tale che:

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{per } t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1) & \text{per } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Scriviamo $c = c_1 * c_2$ per denotare tale giunzione.

Definizione 1.9. Chiamiamo *lunghezza* di una curva c in X il numero reale

$$l(c) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$$

dove l'estremo superiore è preso su tutte le possibili partizioni $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_n)$ di $[a, b]$ tali che $a = t_0 \leq \dots \leq t_n = b$. Diciamo che c è *rettificabile* se tale sup è finito.

Definizione 1.10 (Cambiamento di parametro). Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ e $\gamma': [c, d] \rightarrow X$ due cammini. Diciamo che γ' si ottiene da γ per cambiamento di parametro se esiste una mappa $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ monotona, suriettiva e tale che $\gamma' = \gamma \circ \psi$. La mappa ψ è anch'essa detta *cambiamento di parametro*.

Osservazione 1.11. Nella definizione di cambiamento di parametro non si richiede che la mappa ψ sia un omeomorfismo. Inoltre una funzione monotona e surgettiva tra due intervalli di \mathbb{R} è necessariamente continua, dunque ψ è continua.

Elenchiamo alcune proprietà della lunghezza di una curva, omettendone la dimostrazione.

Proposizione 1.12. Siano (X, d) uno spazio metrico e $c: [a, b] \rightarrow X$ un cammino. Allora:

1. $l(c) \geq d(c(a), c(b))$ e $l(c) = 0$ se e solo se c è costante;
2. Se $\phi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ è un cambiamento di parametro allora $l(c) = l(c \circ \phi)$;
3. Se c è dato dalla giunzione tra c_1 e c_2 allora $l(c) = l(c_1) + l(c_2)$;
4. Se $i(c)$ è il cammino inverso definito da $i(c)(t) = c(b + a - t)$ allora $l(c) = l(i(c))$;
5. Se c è rettificabile di lunghezza l allora la funzione $\lambda: [a, b] \rightarrow [0, l]$ definita da $\lambda(t) = l(c|_{[a, t]})$ è una funzione continua monotona crescente;
6. Parametrizzazione per lunghezza d'arco: se c e λ sono come al punto 5 allora esiste un'unica curva $\tilde{c}: [0, l] \rightarrow X$ tale che $\tilde{c} \circ \lambda = c$ e $l(\tilde{c}|_{[0, t]}) = t$; diciamo in tal caso che la curva \tilde{c} è parametrizzata per lunghezza d'arco;
7. Inferiore semicontinuità: sia c_n successione di cammini da $[a, b]$ in X convergente uniformemente ad un cammino c . Se c è rettificabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $N(\varepsilon)$ tale che

$$l(c) \leq l(c_n) + \varepsilon$$

per $n > N(\varepsilon)$.

Osservazione 1.13. Una geodetica è, in particolare, una curva parametrizzata per lunghezza d'arco.

La curva $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ è detta *parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco* se γ è costante, oppure esiste una curva $\gamma': [c, d] \rightarrow X$ parametrizzata per lunghezza d'arco tale che $\gamma = \gamma' \circ \psi$, dove ψ è una trasformazione affine tra intervalli di \mathbb{R} . Osserviamo inoltre che questa nozione è coerente con quella già data nel caso delle geodetiche.

Osservazione 1.14. Dalla proposizione precedente segue che ogni cammino di lunghezza l ha la stessa immagine di un cammino di dominio $[0, 1]$ di lunghezza l che si parametrizza proporzionalmente alla lunghezza d'arco.

In particolare, notiamo che se un cammino tra x e y ha lunghezza $d(x, y)$, allora la sua riparametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.

Chiudiamo la sezione con un risultato di convergenza per geodetiche:

Proposizione 1.15 (Limite di geodetiche). *Sia X uno spazio metrico e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\gamma_n: [a, b] \rightarrow X$ una geodetica (linearmente riparametrizzata). Se la sequenza $\{\gamma_n\}$ converge puntualmente ad una mappa $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, allora γ è una geodetica (linearmente riparametrizzata).*

Dimostrazione. Proviamo la proposizione nel caso in cui le γ_n siano geodetiche, perché per geodetiche linearmente parametrizzate la dimostrazione è analoga. Per ogni t_1, t_2 in $[a, b]$ e per ogni n abbiamo $d(\gamma_n(t_1), \gamma_n(t_2)) = |t_1 - t_2|$. Dalla continuità della metrica d otteniamo

$$|t_1 - t_2| = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_n(t_1), \gamma_n(t_2)) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$$

ovvero γ è una geodetica. □

1.2 Spazi di lunghezze

In questa sezione considereremo spazi metrici la cui distanza tra ogni coppia di punti è data dall'estremo inferiore delle lunghezze delle curve rettificabili che li congiungono. Poiché però, per qualche coppia di punti tali curve possono non esistere, è naturale considerare distanze che assumono anche il valore infinito; dunque la metrica che d'ora in poi considereremo sarà a valori nella semiretta reale estesa $[0, +\infty]$.

Uno spazio metrico è geodetico se e solo se la distanza tra ogni coppia di punti è uguale alla lunghezza di qualche cammino che li congiunge. Se ne deduce facilmente che uno spazio geodetico è di lunghezze, ed in effetti, come vedremo, per spazi metrici completi e localmente compatti le due nozioni sono equivalenti.

Cominciamo col formalizzare le idee annunciate:

Definizione 1.16 (Metrica intrinseca). *Sia (X, d) uno spazio metrico; diciamo che la distanza d è una *metrica di lunghezze*, o *metrica intrinseca*, se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ si ha:*

$$d(x, y) = \begin{cases} \inf_{c \in \Gamma} \{l(c)\} & \text{se } \Gamma \neq \emptyset \\ \infty & \text{se } \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

dove Γ è l'insieme delle curve rettificabili $c: I \rightarrow X$ di estremi x e y . In tal caso diremo che lo spazio (X, d) è uno *spazio di lunghezze*.

Se la metrica su X non è una metrica di lunghezze possiamo considerare la metrica di lunghezze indotta da d . La distanza d ci permette infatti di calcolare la lunghezza di una curva c e quindi di considerare la mappa

$$\begin{aligned} d_I: X \times X &\longrightarrow [0, \infty] \\ (x, y) &\longmapsto \inf_{c \in \Gamma} \{l(c)\} \end{aligned}$$

dove Γ è, come sopra, l'insieme di curve rettificabili tra x e y .

Definizione 1.17. La mappa d_I definita a partire da d è chiamata *metrica di lunghezze indotta da d* .

La seguente proposizione mostra che d_I è effettivamente una metrica su X e rimarca alcune sue proprietà:

Proposizione 1.18. Sia (X, d) spazio metrico e consideriamo la mappa d_I sopra definita. Allora:

- i. d_I è una metrica su X ;
- ii. $d_I(x, y) \geq d(x, y)$ per ogni x, y in X ;
- iii. se $c: [a, b] \rightarrow X$ è continua rispetto alla topologia indotta da d_I , lo è anche rispetto alla topologia indotta da d ;
- iv. se $c: [a, b] \rightarrow X$ è una curva rettificabile in (X, d) , allora è una curva continua anche in (X, d_I) ;
- v. la lunghezza di una curva c in (X, d_I) è pari alla lunghezza della stessa curva in (X, d) ; in particolare, una curva a valori in X è rettificabile rispetto a d se e solo se è rettificabile rispetto a d_I ;
- vi. $(d_I)_I = d_I$.

Dimostrazione. Dimostreremo la proposizione utilizzando le proprietà della lunghezza di una curva enunciate nella Proposizione 1.12.

- i. È chiaro che $d_I(x, x) = 0$, mentre $d_I(x, y) = 0$ implica che $x = y$, in quanto, per il punto successivo, si ha $d_I(x, y) \geq d(x, y)$. La simmetria di d_I deriva dall'uguaglianza $l(c) = l(i(c))$ e la proprietà transitiva dalla disuguaglianza

$$\inf_{c \in \Gamma} \{l(c)\} = \inf_{c \in \Gamma} \{l(c_1) + l(c_2) \mid c_1 * c_2 = c\} \leq \inf_{c_1 \in \Gamma_1} \{l(c_1)\} + \inf_{c_2 \in \Gamma_2} \{l(c_2)\}$$

dove, se c è una curva tra x e y e $I = I_1 \cup I_2$ è una partizione di I allora $c_1 = c|_{I_1}$ e $c_2 = c|_{I_2}$.

- ii. Se $c: I \rightarrow X$ è una curva tra x e y , allora $d(x, y) \leq l(c)$, quindi $d(x, y) \leq d_I(x, y)$.
- iii. Per il punto precedente la topologia τ_I indotta da d_I è più fine della topologia τ indotta da d , da cui la tesi.
- iv. Fissiamo $t_0, t \in [a, b]$; per additività della lunghezza si ha

$$d_I(c(t_0), c(t)) \leq l(c|_{[t_0, t]}) = |l(c|_{[a, t]}) - l(c|_{[a, t_0]})|$$

e per il punto (5) della Proposizione 1.12, la mappa $\lambda(t) = l(c|_{[a, t]})$ è una funzione crescente continua rispetto a d_I . Otteniamo dunque che $d_I(c(t_0), c(t))$ tende a 0 per t tendente a t_0 , ovvero c è continua.

- v. Per il punto (iii) c è una curva rispetto alla topologia indotta da d , mentre per il punto (ii) $d(x, y) \leq d_I(x, y)$ implica $l(c) \leq l_I(c)$, dove $l_I(c)$ è la lunghezza di c per la metrica di lunghezze.

Per il viceversa invece osserviamo che

$$l_I(c) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{k-1} d_I(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{k-1} l(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = l(c).$$

- vi. Segue facilmente dal punto precedente.

□

Chiameremo (X, d_I) lo spazio di lunghezze associato a (X, d) e notiamo che $d_I = d$ se e solo se (X, d) è uno spazio di lunghezze.

Diamo infine qualche esempio di spazi di lunghezze:

Esempio 1.19.

- Come già anticipato, ogni spazio geodetico è uno spazio di lunghezze; infatti, se $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ è una geodetica tra x e y , allora $d_I(x, y) \leq l(\gamma) = d(x, y)$, il che dimostra che X è uno spazio di lunghezze. In particolare ogni spazio normato è uno spazio di lunghezze, ad esempio lo spazio euclideo.
- Ogni varietà riemanniana (M, g) è uno spazio di lunghezze con la distanza riemanniana, dove la distanza riemanniana tra due punti p, q è definita come

$$d(p, q) = \inf\{l(\sigma) \mid \sigma: [a, b] \rightarrow M \text{ curva regolare a tratti con } \sigma(a) = p \text{ e } \sigma(b) = q\}$$

e la lunghezza di σ è data dall'integrale della norma della sua derivata prima. Non è difficile dimostrare infatti che, per curve regolari a tratti, questa lunghezza coincide con la definizione di lunghezza data nella prima sezione.

- Un esempio di spazio metrico in cui la distanza intrinseca indotta non coincide con la distanza originaria è invece dato da S^2 con la metrica indotta da \mathbb{R}^3 .

Si è già osservato all'inizio della sezione che la nozione di geodetica è strettamente legata a quella di spazio metrico di cammini. È lecito dunque chiedersi in che relazione sono queste due definizioni. Nell'esempio precedente si è visto che uno spazio geodetico è necessariamente uno spazio di lunghezze.

Il viceversa non è in generale vero e come esempio possiamo pensare al piano \mathbb{R}^2 privato dell'origine. La metrica di lunghezze coincide su questo spazio con la metrica euclidea, ma non esiste alcuna geodetica che connetta il punto x con il suo riflesso $-x$. Quindi tale spazio metrico è uno spazio di lunghezze non geodetico, e il problema risiede nell'aver privato \mathbb{R}^2 dell'origine. La completezza dello spazio sembra dunque essere una proprietà chiave affinché uno spazio metrico di cammini sia anche geodetico, ma naturalmente esistono anche spazi geodetici non completi, quale la palla aperta nel piano euclideo.

In effetti, come anticipato, il ssTeorema di Hopf-Rinow assicura che completezza e locale compattezza garantiscono che uno spazio di lunghezze sia in effetti geodetico.

Premettiamo i seguenti due lemmi alla dimostrazione del Teorema di Hopf-Rinow:

Lemma 1.20. *Siano (X, d) uno spazio di lunghezze, x, y due punti di X e α, β due numeri reali non negativi per cui $d(x, y) \leq \alpha + \beta$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z \in X$ tale che $d(x, z) \leq \alpha$ e $d(y, z) \leq \beta + \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $c: [a, b] \rightarrow X$ un cammino tra x e y di lunghezza minore o uguale a $d(x, y) + \varepsilon$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\alpha \leq l(c)$ (se infatti si avesse $l(c)$ minore di α allora ponendo $z = y$ abbiamo la tesi). Per la Proposizione 1.12 (5) possiamo supporre, a meno di considerare il cammino \tilde{c} al posto di c , che c sia parametrizzata per lunghezza d'arco. Se poniamo $z = c(a + \alpha)$ allora abbiamo finito in quanto:

$$d(x, z) \leq l(c|_{[a, a+\alpha]}) = \alpha$$

$$d(z, y) \leq l(c|_{[a+\alpha, b]}) = l(c) - \alpha \leq d(x, y) + \varepsilon - \alpha \leq \beta + \varepsilon.$$

□

Lemma 1.21. *Siano X uno spazio di lunghezze, $x \in X$ ed $r > 0$. Per ogni $y, z \in B(x, r)$ esiste un cammino $c: [a, b] \rightarrow X$ di lunghezza minore di $2r$ che congiunge y e z . Di conseguenza l'immagine di ogni cammino così fatto è contenuta in $B(x, 2r)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z) < 2r$. Poiché X è uno spazio di lunghezze, allora esiste un cammino c tra y e z di lunghezza minore di $2r$.

Supponiamo che esista un $t \in [a, b]$ per cui $c(t)$ non appartenga a $B(x, 2r)$. Allora abbiamo

$$d(y, c(t)) \geq d(x, c(t)) - d(x, y) \geq r$$

$$d(z, c(t)) \geq d(x, c(t)) - d(x, z) \geq r.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha

$$l(c) = l(c|_{[a,t]}) + l(c|_{[t,b]}) \geq d(y, c(t)) + d(z, c(t)) \geq 2r$$

da cui l'assurdo. Quindi c è tutta contenuta in $B(x, 2r)$. \square

Notazione. Fissato un punto a di X , indichiamo con $\bar{B}(a, r) \subseteq X$, o più semplicemente $\bar{B}(r)$ se non vi è ambiguità di scrittura, l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $d(a, x) \leq r$.

Teorema 1.22 (Teorema di Hopf-Rinow). *Sia X uno spazio di lunghezze. Se X è completo e localmente compatto allora*

- (i) ogni sottoinsieme chiuso e limitato di X è compatto;
- (ii) X è geodetico.

Dimostrazione. Per dimostrare il primo punto è sufficiente provare che le palle chiuse sono compatte. Infatti se C è chiuso e limitato allora esiste $\bar{B}(a, r)$ con $a \in C$ ed $r > 0$ tale che $C \subseteq \bar{B}(a, r)$. Poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è a sua volta compatto, ne ricaviamo che C è compatto.

Proviamo allora che, fissati un punto a in X ed $r > 0$ le palle chiuse $\bar{B}(r)$ sono compatte. Sia a questo scopo I l'insieme dei numeri non negativi ρ per cui $\bar{B}(\rho)$ è compatta e osserviamo che I è non vuoto, in quanto contiene 0. Se mostriamo che I è aperto e chiuso, allora possiamo concludere che coincide con l'intervallo dei numeri reali non negativi, che è quanto richiesto nel primo punto del teorema.

Poiché X è localmente compatto I contiene tutto un intorno di 0. Se $\rho \neq 0$ è in I allora $\bar{B}(\rho)$ è compatto; per locale compattezza, possiamo considerarne il ricoprimento aperto $B(x_i, \varepsilon_i)$ al variare di $x_i \in \bar{B}(\rho)$, dove ogni $\bar{B}(x_i, \varepsilon_i)$ è compatto. Possiamo estrarne allora un sottoricoprimento finito, dato da $\{B(x_i, \varepsilon_i)\}_{i=0}^n$. La distanza tra $\bar{B}(\rho)$ e il chiuso $X - \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon_i)$ è strettamente positiva perché sono due chiusi disgiunti in uno spazio metrico, uno dei quali compatto. Se poniamo 2δ tale distanza, allora $\bar{B}(\rho + \delta)$ è un chiuso nel compatto $\cup_{i=0}^n \bar{B}(x_i, \varepsilon_i)$, quindi è compatto; ciò dimostra che I è aperto.

Per provare che I è anche chiuso mostriamo che se $\bar{B}(r)$ è compatto per ogni $r < \rho$ allora anche $\bar{B}(\rho)$ è compatto. Osserviamo che $\bar{B}(\rho)$ è un sottospazio chiuso in uno spazio completo, quindi è completo; per dimostrare che è compatto è sufficiente allora dimostrare che è totalmente limitato.

A questo scopo fissiamo $\varepsilon > 0$, che senza perdita di generalità possiamo supporre minore di 3ρ , e sia r un numero reale positivo, con $0 < \rho - \varepsilon/3 < r < \rho$. Per compattezza di $\bar{B}(r)$ possiamo trovare un numero finito di punti $\{x_1, \dots, x_n\}$ tali che $\bar{B}(r) \subseteq \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon/3)$.

Sia ora $y \in \bar{B}(\rho)$; poiché X è uno spazio di lunghezze e $d(a, y) \leq \rho = (\rho - \varepsilon/3) + \varepsilon/3$, per il Lemma 1.20, possiamo trovare un punto $z \in X$ tale che

$$d(a, z) \leq \rho - \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad d(y, z) \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Dalla relazione $d(a, z) \leq \rho - \varepsilon/3 < r$ segue che $z \in \bar{B}(r)$ ed esiste un indice i per cui $z \in B(x_i, \varepsilon/3)$.

Dalla disuguaglianza $d(y, z) \leq 2\varepsilon/3$ segue invece che $d(y, x_i) \leq d(y, z) + d(z, x_i) \leq \varepsilon$, il che dimostra che $\bar{B}(\rho)$ è contenuto nell'unione delle palle $B(x_i, \varepsilon)$ che sono un numero finito. Dunque $\bar{B}(\rho)$ è totalmente limitato, e perciò compatto.

Proviamo ora che X è uno spazio geodetico. Siano a questo scopo a e b due punti distinti di X . Per ogni $n > 1$ consideriamo un cammino $c_n: [0, 1] \rightarrow X$ parametrizzato proporzionalmente alla lunghezza d'arco tale che $l(c_n) < d(a, b) + 1/n$. Mostriamo che questa è una successione di funzioni equicontinua. Per ogni $t_1, t_2 \in [0, 1]$ si ha:

$$|t_1 - t_2| = \frac{l(c_n|_{[t_1, t_2]})}{l(c_n)} \geq \frac{d(c_n(t_1), c_n(t_2))}{d(a, b) + 1}$$

e per $|t_1 - t_2| < \varepsilon/(d(a, b) + 1)$ si ha $d(c_n(t_1), c_n(t_2)) < \varepsilon$.

Per il punto precedente le palle chiuse sono compatte, mentre per il Lemma 1.21 l'immagine di ogni cammino c_n è contenuta in $\bar{B}(2d(a, b))$.

Applicando la variante del Teorema di Ascoli-Arzelà data nel Teorema 1.24, poiché $[0, 1]$ è metrico separabile e $\bar{B}(2d(a, b))$ risulta essere compatto, esiste una sottosuccessione $\{c_{k_n}\}$ che converge uniformemente ad un cammino $c: [0, 1] \rightarrow X$; usando l'inferiore semicontinuità della lunghezza enunciata nella Proposizione 1.12 abbiamo:

$$l(c) \leq \liminf l(c_{k_n}) = d(a, b).$$

D'altra parte $d(a, b) \leq l(c)$ e quindi $d(a, b) = l(c)$; c risulta allora essere una geodetica linearmente riparametrizzata tra a e b , e ciò conclude la dimostrazione. \square

Definizione 1.23. Diciamo che uno spazio metrico X è *proprio* se per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ la palla chiusa $\bar{B}(x, r)$ è compatta.

Concludiamo la sezione con l'enunciato della variante del Teorema di Ascoli-Arzelà usata nella dimostrazione precedente ed un risultato di continuità per le geodetiche, utile nella prossima sezione.

Ricordiamo che una successione di funzioni $\{f_n\}$ tra spazi metrici è detta *equicontinua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui $d(x, y) < \delta$ implica $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.24 (Teorema di Ascoli-Arzelà). *Se X è uno spazio metrico compatto e Y è uno spazio metrico separabile allora ogni successione di mappe equicontinue $f_n: Y \rightarrow X$ ammette una sottosuccessione convergente (uniformemente sui sottoinsiemi compatti) ad una mappa continua $f: Y \rightarrow X$.*

Dal teorema segue che se X è uno spazio metrico compatto e se $\{c_n\}$ è una successione di geodetiche linearmente riparametrizzate da $[0, 1]$ in X , allora esistono una geodetica $c: [0, 1] \rightarrow X$ linearmente riparametrizzata, ed una sottosuccessione $c_{n(i)}$ di $\{c_n\}$ tale che $c_{n(i)}$ tende a c uniformemente per $n(i)$ tendente ad infinito. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e t, t' in $[0, 1]$ abbiamo

$$d(c_n(t), c_n(t')) \leq D|t - t'|$$

dove D è il diametro di X . Dunque le c_n sono equicontinue e c è una geodetica perché il limite uniforme di geodetiche è una geodetica.

Lemma 1.25. *Siano x e y punti di uno spazio geodetico proprio X . Supponiamo che esista un unico segmento geodetico $c: [0, 1] \rightarrow X$ che li congiunge. Siano $c_n: [0, 1] \rightarrow X$ geodetiche linearmente riparametrizzate in X tali che le successioni di punti $c_n(0)$ e $c_n(1)$ convergono rispettivamente ad x e y . Allora c_n converge a c uniformemente.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per quanto visto sopra, l'immagine di c_n è contenuta in un compatto indipendente da n , e ogni sottosuccessione di c_n ammette a sua volta una sottosuccessione che converge a una geodetica, che, per unicità, deve essere c . Dal fatto che ogni sottosuccessione di c_n ammette una sottosuccessione che converge a c si deduce che anche c_n converge a c , da cui la tesi. \square

Definizione 1.26. Sia X unicamente geodetico e $c(x, y): [0, 1] \rightarrow X$ denoti il segmento geodetico linearmente riparametrizzato tra x e y . Diciamo che le geodetiche in X variano con continuità rispetto agli estremi se $c(x_n, y_n)$ tende a $c(x, y)$ uniformemente ogni qual volta x_n ed y_n tendono rispettivamente ad x e y .

Una conseguenza immediata del lemma precedente è data dal seguente corollario:

Corollario 1.27. *Se X è uno spazio metrico proprio unicamente geodetico, allora le geodetiche in X variano con continuità rispetto ai loro estremi.*

1.3 Rivestimenti

Dato un rivestimento $p: E \rightarrow X$, lo spazio totale E eredita la struttura locale di X . Ad esempio, il rivestimento di una n -varietà eredita a sua volta una struttura di n -varietà e, analogamente, il rivestimento di una varietà riemanniana eredita la stessa struttura dello spazio base mediante pull-back della metrica riemanniana.

Poiché misurare la lunghezza di una curva in uno spazio metrico, come visto nella prima sezione, è un processo puramente locale, se X è uno spazio di lunghezze, c'è allora un modo naturale di indurre una metrica di lunghezze sullo spazio E . Obiettivo di questa sezione è dare dei dettagli precisi su come realizzare il pull-back della struttura intrinseca di X .

Siano allora X uno spazio di lunghezze e \tilde{X} uno spazio topologico. Siano $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale e $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ un cammino. Definiamo *lunghezza di \tilde{c}* , e la indichiamo ancora con $l(\tilde{c})$, la lunghezza della curva $p \circ \tilde{c}$ in X :

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{c} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{p \circ \tilde{c}} & X \end{array}$$

In questo modo possiamo definire una pseudometrica su \tilde{X} ponendo:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{\tilde{c} \in \tilde{\Gamma}} \{l(\tilde{c})\} = \inf_{\tilde{c} \in \tilde{\Gamma}} \{l(p \circ \tilde{c})\}$$

dove $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ e $\tilde{\Gamma}$ è l'insieme di curve in \tilde{X} tra \tilde{x} e \tilde{y} . Nel caso particolare in cui \tilde{X} è uno spazio di Hausdorff, \tilde{d} è proprio una metrica. Per vederlo abbiamo però bisogno del seguente lemma:

Lemma 1.28 (Unicità del sollevamento). *Siano $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale, Y uno spazio connesso ed $f: Y \rightarrow X$ una funzione continua. Se \tilde{X} è uno spazio di Hausdorff allora per ogni coppia g, h di sollevamenti per f si ha $g = h$ oppure $g(y) \neq h(y)$ per ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $A = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$ e mostriamo che è aperto e chiuso in Y .

Poiché le mappe g, h sono continue, ed \tilde{X} è uno spazio di Hausdorff, allora A è chiuso in Y .

Per mostrare che è anche aperto, fissiamo un elemento y in A e sia $U_{\tilde{y}}$ un intorno aperto di $\tilde{y} = g(y) = h(y)$ tale che $p|_{U_{\tilde{y}}}$ è un omeomorfismo su un intorno aperto di $f(y)$. Sia $W = g^{-1}(U_{\tilde{y}}) \cap h^{-1}(U_{\tilde{y}})$; esso è un aperto, contiene y , ed è tale che $g(w) = h(w)$ per ogni $w \in W$ perché p è iniettiva su $U_{\tilde{y}}$. Dunque A è aperto, e ciò conclude la dimostrazione. \square

Corollario 1.29. *Se \tilde{X} è uno spazio topologico di Hausdorff e $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale, allora \tilde{d} è una metrica su \tilde{X} .*

Dimostrazione. Fissati due punti distinti \tilde{x}, \tilde{y} in \tilde{X} , sia c un cammino che li connette. Possiamo distinguere due casi: \tilde{x}, \tilde{y} possono appartenere alla fibra di due diversi punti in X , oppure possono appartenere entrambi alla fibra dello stesso punto.

Supponiamo prima che esistano $x, y \in X$ distinti e tali che $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$; allora la lunghezza $l(c)$ è pari alla lunghezza $l(p \circ c) \geq d(x, y) > 0$, e quindi è uniformemente limitata dal basso da un numero positivo che non dipende da c . Dunque $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ è positiva.

Supponiamo ora che sia \tilde{x}, \tilde{y} appartengano a $p^{-1}(x)$. Poiché p è un omeomorfismo locale, esiste un intorno aperto \tilde{U} di \tilde{x} tale che la restrizione di p a \tilde{U} sia un omeomorfismo

sulla palla $B(x, \varepsilon)$. Supponiamo per assurdo che esista un cammino c che connette \tilde{x} e \tilde{y} di lunghezza minore di ε ; l'immagine di $p \circ c$ è allora contenuta nella palla $B(x, \varepsilon)$, su cui è definita un'inversa per p . Per unicità dei sollevamenti si ha dunque che c ha estremi in \tilde{x} , da cui l'assurdo perché si erano supposti \tilde{x} e \tilde{y} distinti. \square

Definizione 1.30. Se \tilde{X} è di Hausdorff la metrica \tilde{d} è detta *metrica indotta* su \tilde{X} da p .

Osservazione 1.31. La mappa $p: (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ non incrementa le distanze, ovvero, per ogni coppia di punti \tilde{x}, \tilde{y} in \tilde{X} si ha $d(p(\tilde{x}), p(\tilde{y})) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Infatti, per come è stata definita \tilde{d} , si ha

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{\tilde{c} \in \tilde{\Gamma}} \{l(\tilde{c}) \mid \tilde{c}: I \rightarrow \tilde{X}\}$$

mentre

$$d(p(\tilde{x}), p(\tilde{y})) = \inf_{c \in \Gamma} \{l(c) \mid p \circ \tilde{c} = c: I \rightarrow X\}.$$

Per ogni $\tilde{c} \in \tilde{\Gamma}$ troviamo un cammino $c \in \Gamma$ ma non il viceversa, dunque $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, e l'estremo inferiore su $\tilde{\Gamma}$ risulta essere non minore di quello calcolato su Γ .

Vediamo ora che lo spazio \tilde{X} provvisto della metrica indotta dal rivestimento eredita la struttura di spazio di lunghezze, come annunciato precedentemente:

Proposizione 1.32. Siano X uno spazio di lunghezze e \tilde{X} uno spazio topologico di Hausdorff. Sia $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale e \tilde{d} la metrica indotta da p su \tilde{X} . Allora si ha:

1. $p: (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ è una locale isometria;
2. \tilde{d} è una metrica di lunghezze;
3. \tilde{d} è l'unica metrica su \tilde{X} che soddisfa (1) e (2).

Dimostrazione. Dato $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $x = p(\tilde{x})$, poiché p è un omeomorfismo locale esistono \tilde{U} intorno aperto di \tilde{x} ed U intorno aperto di x tali che

$$p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$$

sia un omeomorfismo, con inversa $s: U \rightarrow \tilde{U}$.

Sia $r > 0$ tale che $B(x, 2r) \subseteq U$. Si vuole dimostrare che s ristretta a $B(x, r)$ è una isometria su $B(\tilde{x}, r)$. A questo scopo siano y e z in $B(x, r)$ ed $\varepsilon \in (0, r)$. Sfruttando il fatto che X è uno spazio di lunghezze, sappiamo esistere un cammino c tra y e z tale che $l(c) < d(y, z) + \varepsilon$. Per il Lemma 1.21 c è inoltre tutto contenuto in $B(x, 2r)$, quindi possiamo considerare la restrizione di s a $B(x, 2r)$. La sua immagine tramite s è allora un cammino tra $s(y)$ e $s(z)$ per cui vale:

$$\tilde{d}(s(y), s(z)) = \inf \{l(\gamma) \mid \gamma: I \rightarrow \tilde{X}\} \leq l(s \circ c) = l(p \circ (s \circ c)) = l(c) < d(y, z) + \varepsilon.$$

Come visto nell'osservazione precedente p non incrementa le distanze e dunque

$$d(y, z) = d(p(s(y)), p(s(z))) \leq \tilde{d}(s(y), s(z)) < d(y, z) + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε concludiamo che $\tilde{d}(s(y), s(z)) = d(y, z)$.

Resta da vedere che $s: B(x, r) \rightarrow B(\tilde{x}, r)$ è surgettiva, ma è facile notare che ciò deriva dal fatto che $p \circ s$ è l'identità su $B(x, r)$ e p non incrementa le distanze.

Abbiamo dimostrato il primo punto; procediamo con gli altri due. Osserviamo che una isometria locale conserva le lunghezze, e poiché p è un'isometria locale la lunghezza di una curva in (\tilde{X}, \tilde{d}) è la stessa lunghezza della sua immagine in (X, d) tramite p . Se denotiamo con $l_{\tilde{X}}$ ed l_X le due lunghezze, si ha, per una curva γ , $l_{\tilde{X}}(\gamma) = l_X(p \circ \gamma)$; ma allora $l_{\tilde{X}}$ coincide proprio con la lunghezza data per composizione delle mappe, quindi $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf l(\gamma) = \inf l_{\tilde{X}}(\gamma)$, ovvero \tilde{d} è una metrica di lunghezze.

Resta da vedere l'unicità della metrica \tilde{d} per cui p risulti una isometria locale. A questo scopo sia d' un'altra metrica su \tilde{X} con le stesse proprietà di \tilde{d} . Poiché p preserva le lunghezze si ha $d'(x, y) = \inf l(\tilde{c}) = \inf l(p \circ \tilde{c}) = \tilde{d}(x, y)$ dove l'estremo inferiore è preso su tutti i possibili cammini che congiungono x e y . Ciò conclude la dimostrazione. \square

Dalla proposizione precedente si evince che, se $p: \tilde{X} \rightarrow X$, con \tilde{X} di Hausdorff, è un omeomorfismo locale e X è uno spazio di lunghezze, anche \tilde{X} eredita la stessa struttura. Ci possiamo chiedere ora quali condizioni metriche su X , \tilde{X} e p possano assicurare che p è un rivestimento. Chiudiamo allora la sezione con il risultato seguente:

Teorema 1.33. *Sia $p: \tilde{X} \rightarrow X$ una mappa tra spazi di lunghezze tale che:*

1. X è connesso;
2. p è un omeomorfismo locale;
3. per ogni cammino $\tilde{c}: I \rightarrow \tilde{X}$ si ha $l(\tilde{c}) \leq l(p \circ \tilde{c})$;
4. X è localmente unicamente geodetico e le geodetiche in X variano localmente con continuità rispetto agli estremi;
5. \tilde{X} è completo;

allora p è un rivestimento.

Osservazione 1.34. Se p è un'isometria locale allora le condizioni (2) e (3) sono banalmente verificate.

Dimostrazione. Proviamo prima che se $c: [0, 1] \rightarrow X$ è una curva rettificabile ed \tilde{x} è nella fibra $p^{-1}(c(0))$, allora esiste un unico sollevamento $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ di c tale che $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{c} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{c} & X \end{array}$$

Sia $J \subseteq I$ il sottospazio non vuoto (in quanto $0 \in J$) massimale tale che per ogni $t \in J$ esiste ed è unico il sollevamento $\tilde{c}|_{[0,t]}$.

Per vedere che J è chiuso, supponiamo che sia della forma $[0, a)$ e consideriamo una successione t_n di punti in $[0, a)$ convergente ad a . Per ogni n il cammino $c|_{[0,t_n]}$ si solleva in modo unico al cammino $\tilde{c}|_{[0,t_n]}$. Per il punto (3) si ha:

$$d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(t_m)) \leq l(\tilde{c}|_{[t_n,t_m]}) \leq l(c|_{[t_n,t_m]}).$$

Poiché la successione $\{l(c|_{[0,t_n]})\}$ è di Cauchy, anche $\tilde{c}(t_n)$ è a sua volta di Cauchy e per completezza dello spazio \tilde{X} converge ad un unico punto che indichiamo con $\tilde{c}(a)$. Allora il sollevamento dato si estende all'intervallo $[0, a]$, e tale sollevamento è unico perché \tilde{X} è uno spazio metrico, quindi di Hausdorff. Abbiamo così mostrato che J è chiuso, quindi $J = [0, t_0]$. Supponiamo ora che $t_0 \neq 1$; poiché p è un omeomorfismo locale, esiste un intorno aperto \tilde{U} di $\tilde{c}(t_0)$ per cui p è un omeomorfismo su un intorno aperto V di $c(t_0)$. Esiste allora un $\varepsilon > 0$ tale che $c|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} \subseteq V$; definiamo allora un prolungamento di \tilde{c} ponendo, per ogni $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$, $\tilde{c}(t) = p^{-1}(c(t))$. Questo è un sollevamento di c , e per unicità dei sollevamenti, è l'unico sollevamento di c sull'intervallo $[0, t_0 + \varepsilon)$. Ciò contraddice la massimalità di $[0, t_0]$, e dunque t_0 deve essere pari ad 1.

Proviamo ora che per ogni $x \in X$ esiste un intorno banalizzante U_x tale che la restrizione di p ad ogni componente connessa di $p^{-1}(U_x)$ è un omeomorfismo; poiché lo spazio X è localmente unicamente geodetico possiamo scegliere come U_x una palla aperta $B(x, r)$ che sia unicamente geodetica, e in cui le geodetiche varino con continuità rispetto agli estremi.

Fissato un tale intorno sia $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e per ogni $y \in B(x, r)$ sia $c_y: [0, 1] \rightarrow B(x, r)$ la geodetica linearmente riparametrizzata tra x e y . Sia \tilde{c}_y l'unico sollevamento di c_y di punto base \tilde{x} e denotiamo con $B_{\tilde{x}}$ l'insieme dei punti q in \tilde{X} per cui esiste l'unico sollevamento di $c_{p(q)}: [0, 1] \rightarrow B(x, r)$ di punto finale q . Posto allora $s_{\tilde{x}}: B(x, r) \rightarrow B_{\tilde{x}}$ tale che $s_{\tilde{x}}(y) = \tilde{c}_y(1)$, vogliamo dimostrare che $s_{\tilde{x}}$ è un omeomorfismo su $B_{\tilde{x}}$, e che $B_{\tilde{x}}$ è aperto. Osserviamo che $p \circ s_{\tilde{x}}(w) = w$ per ogni $w \in B(x, r)$, quindi $s_{\tilde{x}}$ è iniettiva; poiché è surgettiva sull'immagine, e $p|_{B_{\tilde{x}}}$ è continua, ci basta mostrare che $s_{\tilde{x}}$ è continua in y , e che $B_{\tilde{x}}$ è un intorno aperto di $s_{\tilde{x}}(y)$.

Poiché p è un omeomorfismo locale, per ogni $t \in [0, 1]$ siano A_t un intorno aperto di $\tilde{c}_y(t)$ in \tilde{X} e B_t un intorno aperto di $c_y(t)$ in $B(x, r)$ tali che $p|_{A_t}: A_t \rightarrow B_t$ sia un

omeomorfismo. A meno di restrizioni, possiamo supporre che i B_t siano palle aperte. Ricopriamo l'immagine di c_y con le palle B_t così ottenute; per il teorema del numero di Lebesgue esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la restrizione $c_y|_{[(k-1)/n, k/n]}$ sia contenuta in un aperto del ricoprimento, indicato con B_k . Possiamo rinominare con A_k l'intorno in \tilde{X} omeomorfo a B_k .

Per ogni k consideriamo allora la sezione $s^k: B_k \rightarrow A_k$; $s^k \circ p$ è l'identità su B_k ed $s^k(c_y(t)) = s_{\tilde{x}}(c_y(t))$ per ogni $t \in [(k-1)/n, k/n]$, in quanto, posto $w = c_y(t)$ si ha:

$$s_{\tilde{x}}(w) = \tilde{c}_z(1) = (s^k \circ p) \circ \tilde{c}_w(1) = s^k \circ (p \circ \tilde{c}_w)(1) = s^k(w).$$

Per ipotesi i segmenti geodetici in $B(x, r)$ dipendono con continuità dagli estremi, quindi se δ è abbastanza piccolo, per ogni z tale che $d(y, z) < \delta$, si ha

$$c_z([(k-1)/n, k/n]) \subseteq B_k$$

e possiamo definire una mappa

$$\begin{aligned} \tilde{s}: B(y, \delta) \times [0, 1] &\longrightarrow \tilde{X} \\ (z, t) &\longmapsto s^k(c_z(t)) = s_{\tilde{x}}(c_z(t)) \end{aligned}$$

dove $t \in [(k-1)/n, k/n]$.

Per verificare che tale mappa è continua osserviamo che le funzioni s^{k-1} ed s^k coincidono nel punto $(y, t_{k/n})$, quindi su tutto il connesso $B(y, \delta) \times \{k/n\}$ per unicità dei sollevamenti. Dunque, poiché la mappa $t \rightarrow \tilde{s}(c_z(t))$ è un sollevamento di c_z di punto base \tilde{x} , ancora per unicità dei sollevamenti, deve coincidere con \tilde{c}_z . Ciò dimostra che la restrizione di $s_{\tilde{x}}$ a $B(y, \delta)$ coincide con la mappa continua $z \rightarrow \tilde{s}(z, 1)$; in particolare $s_{\tilde{x}}$ è continua in y , e $s_{\tilde{x}}(B(y, \delta))$ è un intorno di $s_{\tilde{x}}(y)$.

Si è mostrato che $p^{-1}(B(x, r))$ è l'unione degli aperti $s_{\tilde{x}}(B(y, \delta))$, dove $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, e p ristretto ad ogni tale insieme è un omeomorfismo su $B(x, r)$.

Dobbiamo mostrare, per concludere, che questi aperti sono disgiunti; ma, se \tilde{y} è sia in $s_{\tilde{x}}(B(x, r))$, che in $s_{\tilde{x}'}(B(x, r))$, allora i sollevamenti di $\tilde{c}_{p(\tilde{y})}$ di punti base \tilde{x} e \tilde{x}' terminano entrambi in \tilde{y} , quindi devono coincidere, e quindi $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

Abbiamo così dimostrato che p è una mappa di rivestimento. \square

1.4 Curvatura per spazi metrici geodetici

In questa ultima sezione definiremo la curvatura per spazi metrici geodetici; definiremo prima degli spazi modello, indicati con \mathcal{M}_{κ}^n , che saranno i modelli fondamentali a curvatura costante cui comparare i nostri spazi, e poi daremo una nozione di curvatura in termini di triangoli geodetici.

Iniziamo con la descrizione intuitiva di ciò che localmente descrive il segno della curvatura sezionale in una varietà riemanniana, o più semplicemente in una superficie. Se consideriamo due raggi geodetici con stesso punto iniziale la curvatura obbliga le due geodetiche, a seconda del segno, ad allontanarsi, o ad avvicinarsi, a divergere o a convergere rispetto a due geodetiche del piano euclideo. Inoltre, il segno della curvatura governa anche la somma degli angoli interni ad ogni triangolo, che può essere maggiore oppure minore di π . Si possono seguire entrambe le direzioni, noi tuttavia seguiremo la prima, dando una definizione di curvatura in base alla divergenza delle geodetiche relativamente agli spazi modello \mathcal{M}_κ^n , come mostrato ad esempio in Figura 1.1, nel caso di $\mathcal{M}_0^2 = \mathbb{R}^2$.

Cominciamo dunque col definire i modelli \mathcal{M}_κ^n . Un modo consiste nel considerare l' n -varietà riemanniana completa semplicemente connessa di curvatura sezionale costante pari a $\kappa \in \mathbb{R}$ (è noto che una tale varietà è unica a meno di isometrie). Tuttavia, per non dare ai nostri oggetti alcuna struttura addizionale, li considereremo dal solo punto di vista metrico. Il fattore discriminante nella definizione di questi spazi, più che la dimensione, sarà come già osservato, il numero reale κ , o meglio, il suo segno; a seconda che sia nullo, positivo, oppure negativo, considereremo come modelli di confronto rispettivamente, lo spazio euclideo, la sfera e lo spazio iperbolico.

Richiamiamo allora brevemente le strutture metriche di questi spazi.

- Lo spazio euclideo \mathbb{E}^n è lo spazio metrico \mathbb{R}^n con la metrica associata alla norma euclidea.
- La sfera n -dimensionale \mathbb{S}^n è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^{n+1} di norma unitaria; definiamo la distanza $d(v, w)$ come l'unico numero reale in $[0, \pi]$ tale che

$$\cos(d(v, w)) = \langle v, w \rangle$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare di \mathbb{R}^n . Osserviamo che $d(v, w)$ non è che l'angolo tra i vettori v e w in \mathbb{R}^{n+1} con determinazione compresa tra 0 e π .

Equivalentemente si può anche considerare la sfera \mathbb{S}^n a partire dal sottospazio \mathbb{S}^n di \mathbb{R}^{n+1} , con la metrica di lunghezze indotta dalla metrica euclidea.

- Posto $\mathbb{E}^{n,1}$ lo spazio vettoriale \mathbb{R}^{n+1} con il prodotto scalare di segnatura $(n, 1, 0)$, chiamiamo spazio iperbolico n -dimensionale e lo indichiamo con \mathbb{H}^n , l'insieme dei punti di $\mathbb{E}^{n,1}$ con ultima coordinata positiva, il cui prodotto scalare con sé stessi è pari a -1 , ovvero:

$$\mathbb{H}^n = \left\{ u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n,1} : \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right) - u_{n+1}^2 = -1, u_{n+1} > 0 \right\}.$$

I punti dello spazio iperbolico coincidono con i punti della parte positiva dell'iperboloide a due falde; la distanza $d(p, q)$ è definita, analogamente alla sfera, come l'unico numero reale non negativo tale che

$$\cosh(d(p, q)) = -\langle p, q \rangle.$$

Dati i tre modelli fondamentali, possiamo dare la definizione di varietà a curvatura costante per κ qualsiasi:

Definizione 1.35. Dato un numero reale κ , indichiamo con \mathcal{M}_κ^n i seguenti spazi metrici:

1. se $\kappa = 0$ allora $\mathcal{M}_0^n = \mathbb{E}^n$;
2. se $\kappa > 0$ allora \mathcal{M}_κ^n è ottenuto dalla sfera \mathbb{S}^n moltiplicando la metrica per un fattore $1/\sqrt{\kappa}$;
3. se $\kappa < 0$ allora \mathcal{M}_κ^n è ottenuto dallo spazio iperbolico \mathbb{H}^n moltiplicando la metrica per un fattore $1/\sqrt{-\kappa}$.

Proposizione 1.36. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\kappa \in \mathbb{R}$ lo spazio metrico \mathcal{M}_κ^n è uno spazio geodetico. Se $\kappa \leq 0$ allora \mathcal{M}_κ^n è unicamente geodetico e le palle in \mathcal{M}_κ^n sono convesse, mentre se $\kappa > 0$ esiste un unico segmento geodetico che congiunge due punti $x, y \in \mathcal{M}_\kappa^n$ se e solo se la distanza tra i due punti è minore di $\pi/\sqrt{\kappa}$.

Dalla proposizione, di cui omettiamo la facile dimostrazione, segue che per $\kappa > 0$, nello studio degli spazi \mathcal{M}_κ^n , si deve fare notevole attenzione al fattore $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$, che non è altro che il diametro di \mathcal{M}_κ^n . Tuttavia, supporremo sempre $\kappa \leq 0$, che sarà per noi il caso più interessante dal punto di vista topologico.

È giunto dunque il momento di definire i triangoli geodetici e i rispettivi triangoli di confronto.

Notazione. Siano p, q punti di uno spazio metrico X ; denotiamo allora con $[p, q]$ l'immagine di una geodetica γ che li connette.

Definizione 1.37 (Triangolo geodetico). Siano $p, q, r \in X$ tre punti di uno spazio metrico X ; chiamiamo *triangolo geodetico*, e lo indichiamo con Δ , la scelta di tre segmenti geodetici $[p, q]$, $[q, r]$ e $[r, p]$ congiungenti i tre punti, detti *vertici* del triangolo geodetico.

Come notazione, la scelta di tali vertici e di tali geodetiche verrà anche data indicando il triangolo geodetico con $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$, mentre se lo spazio è unicamente geodetico scriveremo più semplicemente $\Delta(p, q, r)$.

Definizione 1.38 (Triangolo di confronto). Un *triangolo di confronto* per una tripla di punti (p, q, r) nello spazio metrico (X, d) è un triangolo nel piano euclideo \mathbb{E}^2 di vertici $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, tali che

$$d(p, q) = |\bar{p} - \bar{q}|, \quad d(q, r) = |\bar{q} - \bar{r}| \quad \text{e} \quad d(p, r) = |\bar{p} - \bar{r}|.$$

Un tale triangolo esiste ed è unico a meno di isometrie del piano e verrà indicato con $\bar{\Delta}(p, q, r)$. Infatti, date tre distanze a, b, c , è possibile costruire un unico triangolo con lati pari alle distanze assegnate se e solo se $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ e $c \leq b + a$; ma tali disuguaglianze sono verificate perché lo spazio X è uno spazio metrico.

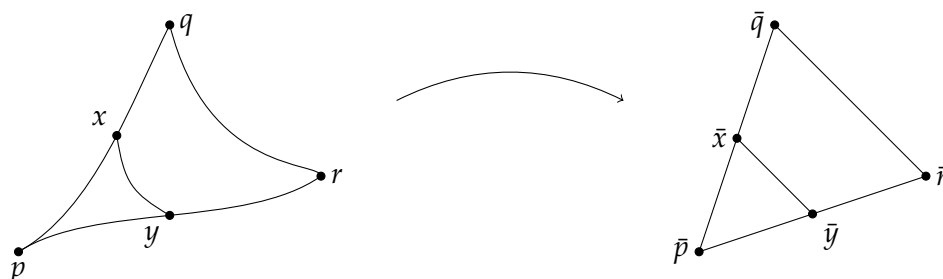


Figura 1.1: Triangolo di confronto in \mathbb{E}^2 e condizione CAT(0).

Più in generale, si può estendere la definizione di triangolo di confronto a qualsiasi modello \mathcal{M}_κ^n . Vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 1.39 (Esistenza dei triangoli di confronto). *Siano $\kappa \in \mathbb{R}$, p, q, r tre punti di uno spazio metrico X , e per $\kappa > 0$ assumiamo che $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_\kappa$. Allora esistono tre punti $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ in \mathcal{M}_κ^2 tali che*

$$d(p, q) = d_{\mathcal{M}_\kappa^2}(\bar{p}, \bar{q}); \quad d(q, r) = d_{\mathcal{M}_\kappa^2}(\bar{q}, \bar{r}); \quad d(p, r) = d_{\mathcal{M}_\kappa^2}(\bar{p}, \bar{r}).$$

Il triangolo $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$ è inoltre unico a meno di isometrie.

I triangoli di confronto sono dunque triangoli geodetici nello spazio \mathcal{M}_κ^2 . L'idea è ora usare questi triangoli per confrontarli con quello originario. Per farlo abbiamo bisogno di ancora una definizione:

Definizione 1.40. Un punto $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subseteq \bar{\Delta}([p, q], [q, r], [r, p])$ è detto *punto di confronto* per $x \in [q, r]$ se si ha $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$. Analogamente si definiscono punti di confronto per $[p, q]$ e $[p, r]$.

Dato allora uno spazio metrico X e un numero reale $\kappa \leq 0$, fissiamo un triangolo geodetico Δ in X . Sia $\bar{\Delta} \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$ un triangolo di confronto per $\bar{\Delta}$, che per la Proposizione 1.39 esiste sempre. Diciamo che Δ soddisfa la condizione CAT(κ) se, per ogni coppia di punti $x, y \in \Delta$, e punti di confronto $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$, si ha

$$d(x, y) \leq d_{\mathcal{M}_\kappa^2}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Osserviamo che questa definizione si può facilmente generalizzare al caso di κ positivo, stando attenti al fattore D_κ . In ogni caso la condizione CAT(κ) formalizza quanto richiesto ad inizio sezione, ovvero impone una condizione sulla divergenza delle geodetiche.

Definizione 1.41 (Spazi $CAT(\kappa)$). Se $\kappa \leq 0$ allora X è detto uno spazio $CAT(\kappa)$ se X è uno spazio geodetico, e ogni triangolo geodetico in X soddisfa la condizione $CAT(\kappa)$.

Come premesso, un esempio di spazi $CAT(\kappa)$ è dato proprio dai modelli M_κ^n . Più in generale, ogni varietà riemanniana con curvatura sezionale limitata superiormente da κ risulta essere uno spazio localmente $CAT(\kappa)$.

Un'interessante relazione tra questi spazi è data dal seguente risultato, che tuttavia non dimostriamo:

Teorema 1.42. *Se X è uno spazio $CAT(\kappa)$, allora è anche $CAT(\kappa')$ per ogni $\kappa' \geq \kappa$.*

Possiamo finalmente dare la definizione di curvatura:

Definizione 1.43 (Curvatura). Uno spazio metrico X è detto a curvatura minore o uguale a κ , con $\kappa \leq 0$, se è localmente $CAT(\kappa)$, ovvero per ogni $x \in X$ esiste r_x tale che la palla $B(x, r_x)$ con la metrica indotta è uno spazio $CAT(\kappa)$.

Capitolo 2

Il teorema di Cartan-Hadamard

2.1 Convessità

Ricordiamo che una mappa $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un insieme convesso di \mathbb{R}^n è detta *convessa* se per ogni coppia di punti $x, y \in I$ e $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Cerchiamo ora di generalizzare la definizione di convessità per funzioni definite su spazi metrici arbitrari. Per una definizione corretta prendiamo spunto dalla geometria differenziale, dove una funzione differenziabile f è convessa se per ogni geodetica γ la funzione di variabile reale $f \circ \gamma$ è convessa; è chiaro dunque che dobbiamo restringere la nostra attenzione a quegli spazi che abbiamo chiamato geodetici, per cui per ogni coppia di punti esiste una geodetica che li connette. Forti del caso differenziabile diamo allora la seguente definizione:

Definizione 2.1. Sia (X, d) uno spazio metrico geodetico; una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è *convessa* se per ogni geodetica $\gamma: I \rightarrow X$ la composizione $f \circ \gamma$ è convessa su I .

Una volta estesa la definizione di convessità alle funzioni, ci si può chiedere quando la stessa metrica d , vista come funzione su $X \times X$, risulta una funzione convessa. Punto chiave per la definizione saranno ancora le geodetiche; diamo quindi due possibili definizioni di convessità per la distanza su X :

Definizione 2.2. Diciamo che la metrica $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ su X è convessa se X è geodetico e per ogni coppia di geodetiche γ_1, γ_2 definite su $[0, 1]$, parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco, si ha

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq (1 - t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + td(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

Definizione 2.3. Diciamo che la metrica $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ su X è convessa se X è geodetico e per ogni coppia di geodetiche γ_1, γ_2 definite su $[0, a_1], [0, a_2]$ e tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(ta_1), \gamma_2(ta_2)) \leq td(\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

La prossima proposizione assicura che le definizioni di convessità appena date sono equivalenti:

Proposizione 2.4. *Le Definizioni 2.2 e 2.3 sono equivalenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che valga la Definizione 2.2 e siano γ_1, γ_2 due geodetiche definite come in 2.3. Riparametrizzando proporzionalmente alla lunghezza d'arco, dunque mediante un omeomorfismo, possiamo supporre che il dominio di entrambe sia l'intervallo $[0, 1]$; allora, poiché $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq td(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$$

ovvero, nella parametrizzazione iniziale, $d(\gamma_1(ta_1), \gamma_2(ta_2)) \leq td(\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$.

Viceversa, supponiamo che valga la definizione 2.3. Fissate allora le due geodetiche γ_1 e γ_2 di dominio $[0, 1]$ linearmente riparametrizzate, sia $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$ una geodetica linearmente riparametrizzata tale che $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_1(0)$ e $\tilde{\gamma}(1) = \gamma_2(1)$. Poiché siamo nella situazione descritta nella Definizione 2.3, per ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$d(\gamma_1(t), \tilde{\gamma}(t)) \leq td(\gamma_1(1), \tilde{\gamma}(1)) = td(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$$

mentre per convessità sulle inverse $i(\gamma_2)$ e $i(\tilde{\gamma})$ si ha per ogni $s \in [0, 1]$

$$d(i(\gamma_2)(s), i(\tilde{\gamma})(s)) \leq sd(i(\gamma_2)(1), i(\tilde{\gamma})(1)).$$

Poiché $i(\gamma)(s) = \gamma(1 - s)$, sostituendo nella relazione precedente $i(\gamma)$ con γ e $i(\tilde{\gamma})$ con $\tilde{\gamma}$, otteniamo $d(\gamma_2(1 - s), \tilde{\gamma}(1 - s)) \leq sd(\gamma_2(0), \tilde{\gamma}(0))$ per ogni $s \in [0, 1]$. In particolare, se $t = 1 - s$ la disuguaglianza si scrive come $d(\gamma_2(t), \tilde{\gamma}(t)) \leq (1 - t)d(\gamma_2(0), \tilde{\gamma}(0)) = (1 - t)d(\gamma_2(0), \gamma_1(0))$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Usando allora la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d(\gamma_1(t), \tilde{\gamma}(t)) + d(\tilde{\gamma}(t), \gamma_2(t)) \leq td(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) + (1 - t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))$$

e quindi la tesi. □

La seguente proposizione ci mostra quanto siano interessanti gli spazi con metrica convessa:

Proposizione 2.5. *Sia X uno spazio geodetico in cui la distanza è una funzione convessa. Allora X risulta essere unicamente geodetico e contraibile. Inoltre le geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che X è unicamente geodetico. Siano allora x, y due punti di X e $\gamma, \tilde{\gamma}$ due geodetiche $[0, 1] \rightarrow X$ linearmente riparametrizzate che li connettono. Poiché la distanza è una funzione convessa, e $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$, si ha

$$d(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \leq d(\gamma(1), \tilde{\gamma}(1)) = 0$$

e quindi le geodetiche coincidono.

Per mostrare che X è anche contraibile fissiamo prima un punto $x_0 \in X$ e per ogni punto x sappiamo esistere un'unica geodetica tra x_0 e x che indichiamo con $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$.

Definiamo un'omotopia $H: [0, 1] \times X \rightarrow X$ tale che $H(t, x) = \gamma_x(t)$. Osserviamo che $H(0, x) = x_0$ e che $H(1, x) = x$. Per vedere che H è continua siano $x, x' \in X$ e $t, t' \in [0, 1]$. Allora

$$d(H(t, x), H(t', x')) = d(\gamma_x(t), \gamma_{x'}(t')) \leq d(\gamma_x(t), \gamma_x(t')) + d(\gamma_x(t'), \gamma_{x'}(t')).$$

Poiché γ_x è una geodetica, $d(\gamma_x(t), \gamma_x(t')) = |t - t'|d(x, x')$, mentre dalla convessità di d otteniamo che $d(\gamma_x(t'), \gamma_{x'}(t')) \leq t'd(\gamma_x(1), \gamma_{x'}(1)) = t'd(x, x')$; mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo finalmente

$$d(H(t, x), H(t', x')) \leq |t - t'|d(x, x') + t'd(x, x')$$

il che implica la continuità di H .

Per vedere che le geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi, osserviamo che per ogni coppia di geodetiche γ_1, γ_2 , si ha:

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq td(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) + (1 - t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)).$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Definizione 2.6. La metrica d è *localmente convessa* se ogni punto di X ha un intorno su cui la metrica indotta è convessa.

Osserviamo dunque che per la proposizione precedente, ogni spazio localmente convesso è localmente unicamente geodetico e localmente contraibile.

Concludiamo la sezione con un risultato di convessità per spazi CAT(0):

Proposizione 2.7. *Se X è uno spazio CAT(0) allora la metrica $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione mostrando che vale la proprietà di convessità della Definizione 2.3.

Date due geodetiche in X con stesso punto iniziale, siano dunque γ_1 e γ_2 due riparametizzazioni sull'intervallo $[0, 1]$, che per l'Osservazione 1.14 è sempre possibile trovare. Consideriamo il triangolo geodetico $\Delta(\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \gamma_1(1), \gamma_2(1))$ e il rispettivo triangolo di confronto $\bar{\Delta}$ in \mathbb{R}^2 . Fissato $t \in [0, 1]$ abbiamo per il Teorema di Talete:

$$d(\overline{\gamma_1(t)}, \overline{\gamma_2(t)}) = t d(\overline{\gamma_1(1)}, \overline{\gamma_2(1)}) = t d(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$$

e poiché per ipotesi X è $\text{CAT}(0)$ si ha $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d(\overline{\gamma_1(t)}, \overline{\gamma_2(t)})$, ovvero

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq t d(\gamma_1(1), \gamma_2(1)).$$

Riparametizzando otteniamo dunque la disuguaglianza cercata. □

Corollario 2.8. *Se X è uno spazio $\text{CAT}(0)$, allora è contraibile, unicamente geodetico, con le geodetiche che variano con continuità rispetto agli estremi.*

Corollario 2.9. *Per $\kappa \leq 0$ ogni spazio $\text{CAT}(\kappa)$ è contraibile.*

2.2 Verso il Teorema di Cartan-Hadamard

Nella sezione precedente si è data la definizione di convessità per la distanza di uno spazio metrico X e abbiamo dimostrato nella Proposizione 2.1 che per gli spazi $\text{CAT}(0)$ la metrica è una funzione convessa.

Nella seguente sezione mostreremo invece che per spazi metrici per cui la funzione distanza è localmente convessa, quindi, in particolare, per spazi localmente $\text{CAT}(0)$, si possono dare delle informazioni importanti circa la geometria globale e la topologia dello spazio considerato, riassunte nel Teorema di Cartan-Hadamard. Nel caso di varietà riemanniane tali informazioni scaturiscono dal concetto di curvatura sezionale, ben più complesso però della condizione di locale convessità; la forma del teorema che enunceremo e dimostreremo è dunque una generalizzazione dell'analogo risultato per varietà riemanniane.

Abbiamo dimostrato nella sezione precedente che se la metrica d su X è localmente convessa allora in particolare, X è localmente connesso per archi e localmente contraibile, quindi ammette un rivestimento universale \tilde{X} .

Si è mostrato invece nel primo capitolo, che esiste un'unica metrica di lunghezze su \tilde{X} che rende la mappa di rivestimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un'isometria locale, data dalla metrica di lunghezze indotta da X .

Enunciamo ora il teorema:

Teorema 2.10 (Teorema di Cartan-Hadamard). *Sia X uno spazio metrico connesso e completo.*

1. Se la metrica su X è localmente convessa allora la metrica di lunghezze indotta sul rivestimento universale \tilde{X} è globalmente convessa;
2. Se X è a curvatura minore o uguale a κ , con $\kappa \leq 0$, allora \tilde{X} con la metrica di lunghezze indotta è uno spazio $\text{CAT}(\kappa)$.

Possiamo osservare subito che:

- Il teorema assicura che il rivestimento universale di molti spazi metrici è contraibile.
- Nel teorema non si richiede che X sia uno spazio geodetico; dunque, benché esistano esempi di spazi completi (non semplicemente connessi) a curvatura non positiva che non sono geodetici, il teorema mostra che, nelle ipotesi di sopra, il rivestimento universale di tali spazi è sempre geodetico.

Dimostreremo il teorema in più passi; cominciamo da un lemma che dà una restrizione sul comportamento delle geodetiche in spazi con metrica localmente convessa e completa. Nel seguito useremo per semplicità il termine “(locale) geodetica” al posto di “(locale) geodetica linearmente riparametrizzata”.

Lemma 2.11. *Sia X uno spazio metrico e supponiamo che la metrica d su X sia localmente completa e localmente convessa. Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ una geodetica locale tra x e y ; allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che:*

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in X$ per cui $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$ e $d(y, \bar{y}) < \varepsilon$ esiste un'unica geodetica locale $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$ tra \bar{x} e \bar{y} tale che la funzione $t \mapsto d(\gamma(t), \bar{\gamma}(t))$ è convessa;
2. $l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma) + d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y})$.

Dimostrazione. Poiché d è per ipotesi localmente convessa e completa, per ogni punto $x \in \gamma(I)$ sia $\varepsilon_x > 0$ tale che $\bar{B}(x, 2\varepsilon_x)$ è completa e convessa. Sia allora ε il minimo di tali ε_x , che per compattezza è positivo. Questo ε è dunque tale che per ogni $t \in [0, 1]$ la metrica indotta sulla palla chiusa $\bar{B}(\gamma(t), 2\varepsilon)$ è completa e convessa.

Dimostriamo ora il lemma in tre passi.

Proviamo prima l'unicità. Supponiamo dunque che $\bar{\gamma}$ sia come al punto (1) dell'enunciato e sia $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $t \mapsto d(\gamma(t), \bar{\gamma}(t))$. Per ipotesi si ha

$$\psi((1-s)t_1 + st_2) \leq (1-s)\psi(t_1) + s\psi(t_2)$$

per ogni $t_1, t_2, s \in [0, 1]$. Per $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ si ha $\psi(s) \leq (1-s)\psi(0) + s\psi(1)$, ovvero

$$d(\gamma(s), \bar{\gamma}(s)) \leq (1-s)d(x, \bar{x}) + sd(y, \bar{y}) < (1-s)\varepsilon + s\varepsilon = \varepsilon$$

per ogni $s \in [0, 1]$.

Siano allora γ_1, γ_2 due geodetiche locali con punti iniziali e finali (a priori diversi) rispettivamente in $B(x, \varepsilon)$ e $B(y, \varepsilon)$, per cui valga, come mostrato, $d(\gamma(s), \gamma_1(s)) < \varepsilon$ e $d(\gamma(s), \gamma_2(s)) < \varepsilon$ per ogni $s \in [0, 1]$. Fissiamo un $t_0 \in [0, 1]$ e consideriamo i punti $\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)$ che distano al più ε da $\gamma(t_0)$. Per ipotesi esistono η_1, η_2 tali che γ_1 e γ_2 sono geodetiche se ristrette all'intervallo $[t_0 - \eta_i, t_0 + \eta_i]$; poiché $d(\gamma_i(t_0), \gamma(t_0)) < \varepsilon$ per $i = 1, 2$, a meno di considerare sotto-intervalli di $[t_0 - \eta_i, t_0 + \eta_i]$ possiamo supporre che γ_1 e γ_2 , ristrette a $[t_0 - \eta_i, t_0 + \eta_i]$, siano geodetiche tutte contenute in $\bar{B}(\gamma(t_0), 2\varepsilon)$. Dopo aver riparametrizzato queste restrizioni sul dominio $[0, 1]$, poiché d è convessa sulla palla considerata, si ha

$$d(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \leq (1-s)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + sd(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$$

per ogni $s \in [0, 1]$.

La funzione $s \mapsto d(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ è dunque convessa sull'intorno di t_0 dato da $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ dove $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$; in breve, abbiamo dimostrato che per ogni $t \in [0, 1]$ esiste un intorno $[t - \eta, t + \eta]$ di t su cui la mappa $\varphi: s \mapsto d(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ è convessa, e ciò vuol dire che φ è localmente convessa.

Poiché la mappa φ è definita sul convesso $[0, 1]$ essa è anche globalmente convessa. In particolare, se $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ otteniamo

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + td(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) = 0$$

ovvero le due geodetiche sono uguali; ciò conclude la prova dell'unicità.

Proviamo ora che (1) implica (2). A questo scopo consideriamo ancora due locali geodetiche come sopra, tali che $d(\gamma(t), \gamma_1(t)) < \varepsilon$ e $d(\gamma(t), \gamma_2(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \in [0, 1]$. Nel punto precedente abbiamo provato, in queste ipotesi, che la distanza tra γ_1 e γ_2 è una funzione convessa. In particolare, se aggiungiamo la condizione $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ si ha la disuguaglianza:

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq td(\gamma_1(1), \gamma_2(1)).$$

Osserviamo inoltre che poiché γ_1 e γ_2 sono linearmente riparametrizzate, per t abbastanza piccolo si ha $l(\gamma_i|_{[0,t]}) = tl(\gamma_i)$ e $l(\gamma_i|_{[0,t]}) = d(\gamma_i(0), \gamma_i(t))$.

Mettendo insieme queste relazioni otteniamo:

$$\begin{aligned} tl(\gamma_2) = d(\gamma_2(0), \gamma_2(t)) &= d(\gamma_1(0), \gamma_2(t)) \\ &\leq d(\gamma_1(0), \gamma_1(t)) + d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ &\leq tl(\gamma_1) + td(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) \end{aligned}$$

da cui $l(\gamma_2) \leq l(\gamma_1) + d(\gamma_1(1), \gamma_2(1))$.

Siano ora γ e $\bar{\gamma}$ come al punto (1) e consideriamo l'unica geodetica locale $\tilde{\gamma}$ tra \bar{x} e \bar{y} che soddisfi le condizioni del lemma. Applicando la disuguaglianza precedente a $\gamma_1 = \tilde{\gamma}$ e $\gamma_2 = \bar{\gamma}$ otteniamo

$$l(\bar{\gamma}) \leq l(\tilde{\gamma}) + d(\tilde{\gamma}(1), \bar{\gamma}(1)) = l(\tilde{\gamma}) + d(y, \bar{y})$$

e applicando a $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$ e $\gamma_2(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$:

$$l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma) + d(\gamma(0), \tilde{\gamma}(0)) = l(\gamma) + d(x, \bar{x}).$$

Combinando le due disuguaglianze abbiamo dimostrato il punto (2).

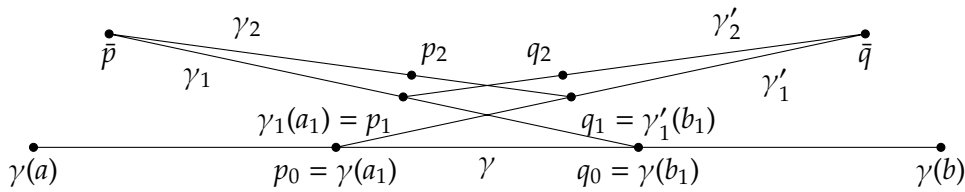


Figura 2.1: Costruzione di $\bar{\gamma}$.

Resta da provare l'esistenza di $\bar{\gamma}$. Sia $A > 0$ e consideriamo la proprietà

$\boxed{P(A)}$ Per ogni $a, b \in [0, 1]$ tali che $0 < b - a \leq A$ e per ogni $\bar{p}, \bar{q} \in X$ con $d(\gamma(a), \bar{p}) < \varepsilon$ e $d(\gamma(b), \bar{q}) < \varepsilon$ esiste una geodetica locale $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow X$ tale che $\bar{\gamma}(a) = \bar{p}$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{q}$ e $d(\gamma(t), \bar{\gamma}(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \in [a, b]$.

Cominciamo con il dimostrare che $P(A)$ è vera per $A < \varepsilon/l(\gamma)$.

Se $A < \varepsilon/l(\gamma)$ si ha per ogni a, b tali che $0 \leq b - a \leq A$

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq l(\gamma|_{[a,b]}) \leq l(\gamma)(b - a) < l(\gamma) \frac{\varepsilon}{l(\gamma)} = \varepsilon.$$

Sia ora \bar{B} la palla chiusa $\bar{B}(\gamma(a), 2\varepsilon) \subseteq X$, che per ipotesi è convessa. I punti \bar{p} e \bar{q} distano da $\gamma(a)$ meno di 2ε , dunque per convessità di \bar{B} esiste una geodetica $\bar{\gamma}$ tra \bar{p} e \bar{q} tutta contenuta in \bar{B} ; dalla Definizione 2.2 segue infine la tesi, in quanto

$$d(\gamma(t), \bar{\gamma}(t)) \leq (1-t)d(\gamma(a), \bar{\gamma}(a)) + td(\gamma(b), \bar{\gamma}(b)) < \varepsilon.$$

per ogni $t \in [a, b]$.

Per dimostrare l'esistenza su tutto l'intervallo è sufficiente mostrare che se $P(A)$ è vera, lo è anche $P(3A/2)$, in quanto abbiamo già visto nella prima parte della dimostrazione, che se $\bar{\gamma}$ verifica $P(1)$, ed in particolare $d(\gamma(t), \bar{\gamma}(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora $\bar{\gamma}$ verifica la condizione (1).

Siano allora a, b in $[0, 1]$ tali che $0 < b - a \leq 3A/2$ e fissiamo $\bar{p}, \bar{q} \in X$ con $d(\gamma(a), \bar{p})$ e $d(\gamma(b), \bar{q})$ minori di ε . Per trovare la locale geodetica $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow X$ dividiamo in tre parti uguali il segmento $[a, b]$ con la suddivisione $a < a_1 < b_1 < b$.

Costruiamo ricorsivamente due sequenze di punti $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ negli intorni $B(\gamma(a_1), \varepsilon)$ e $B(\gamma(b_1), \varepsilon)$ di $\gamma(a_1)$ e $\gamma(b_1)$ come mostrato nella Figura 2.1, e mostriamo che sono due successioni di Cauchy. Per la costruzione poniamo $p_0 = \gamma(a_1)$ e $q_0 = \gamma(b_1)$; assumendo induttivamente di avere i punti $p_{n-1} \in B(\gamma(a_1), \varepsilon)$ e $q_{n-1} \in B(\gamma(b_1), \varepsilon)$, poiché $b_1 - a \leq A$ e $b - a_1 \leq A$, usiamo la proprietà $P(A)$ per costruire due geodetiche locali

$$\gamma_n: [a, b_1] \rightarrow X \quad \text{e} \quad \gamma'_n: [a_1, b] \rightarrow X$$

rispettivamente tra \bar{p} e q_{n-1} e tra p_{n-1} e \bar{q} , con $d(\gamma(t), \gamma_n(t)) < \varepsilon$ per $t \in [a, b_1]$ e $d(\gamma(t), \gamma'_n(t)) < \varepsilon$ per $t \in [a_1, b]$. Siano allora $p_n = \gamma_n(a_1)$ e $q_n = \gamma'_n(b_1)$.

Per convessità degli intorni di p_0 e q_0 abbiamo $d(p_0, p_1) < \varepsilon/2$ e $d(q_0, q_1) < \varepsilon/2$, perché immagini dei punti medi di $[a, b_1]$ e $[a_1, b]$. Più in generale, la convessità di $B(\gamma(t), \varepsilon)$ implica, come nella dimostrazione dell'unicità di $\bar{\gamma}$, che la funzione

$$\varphi_n: t \longmapsto d(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t))$$

è una funzione localmente convessa, quindi convessa perché di dominio convesso. Quindi si ha $d(p_n, p_{n+1}) < d(q_{n-1}, q_n)/2$ e $d(q_n, q_{n+1}) < d(p_{n-1}, p_n)/2$, da cui

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(p_n, p_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad d(q_n, q_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Le due successioni sono dunque di Cauchy negli intorni di $\gamma(a_1)$ e $\gamma(b_1)$.

Ancora per convessità della funzione φ_n , si ha che la distanza tra $\gamma_n(t)$ e $\gamma_{n+1}(t)$ è limitata da $d(q_{n-1}, q_n) < \varepsilon/2^n$, quindi la successione $\{\gamma_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\bar{B}(\gamma(t), \varepsilon)$ per ogni $t \in [a, b_1]$, e in modo analogo la successione $\{\gamma'_n(t')\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\bar{B}(\gamma'(t'), \varepsilon)$ per ogni $t' \in [a_1, b]$. Segue che le locali geodetiche γ_n e γ'_n convergono uniformemente a due cammini γ_1 e γ_2 , che per la Proposizione 1.15 sono due geodetiche locali la cui restrizione all'intervallo $[a_1, b_1]$ coincide. L'unione di queste due geodetiche locali dà la locale geodetica $\bar{\gamma}$ cercata, e ciò termina la dimostrazione del lemma. \square

2.3 La mappa esponenziale

Nel caso di varietà riemanniane 1-connesse a curvatura non positiva il Teorema di Cartan-Hadamard segue dal fatto che l'applicazione esponenziale è un rivestimento; si considera una connessione lineare sulla varietà M e, chiamato $\mathcal{E} = \{v \in \text{TM} \mid \sigma_v \text{ è definita su } [0, 1]\}$, dove σ_v è la geodetica in p di vettore tangente v , si definisce mappa esponenziale la funzione $\exp: \mathcal{E} \rightarrow M$ tale che $\exp v = \sigma_v(1)$.

Nel caso di spazi metrici connessi e completi possiamo percorrere un cammino analogo. Cominciamo quindi col fissare uno spazio metrico connesso X e un punto $x_0 \in X$; prendendo spunto dalla definizione precedente, consideriamo l'insieme \mathcal{G}_{x_0} delle geodetiche locali $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ linearmente riparametrizzate in X per cui $\gamma(0) = x_0$. Chiamiamo \mathcal{G}_{x_0} spazio tangente in x_0 e lo dotiamo della topologia indotta dalla convergenza uniforme:

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \sup_{t \in [0,1]} \{d(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))\}.$$

Definizione 2.12. Chiamiamo *mappa esponenziale* l'applicazione:

$$\begin{aligned} \exp: \mathcal{G}_{x_0} &\longrightarrow X \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

Lemma 2.13. *Se la metrica su X è localmente completa e localmente convessa allora:*

- i. \mathcal{G}_{x_0} è contraibile;
- ii. \exp è un'isometria locale;
- iii. esiste un'unica geodetica locale linearmente riparametrizzata tra la mappa costante \tilde{x}_0 ed ogni punto di \mathcal{G}_{x_0} .

Dimostrazione.

- i. Consideriamo l'omotopia $H: \mathcal{G}_{x_0} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}_{x_0}$ data da $H(\gamma, s) = \rho_s(\gamma)$, dove ρ è la "restrizione" di γ data da $\rho_s: [0, 1] \rightarrow X$, $\rho_s(t) = \gamma(ts)$. Il Lemma 2.11 dimostra che le geodetiche locali variano con continuità rispetto agli estremi, rispetto alla topologia indotta dalla convergenza uniforme \mathcal{G}_{x_0} ; dunque H è continua.
- ii. Sia $\gamma \in \mathcal{G}_{x_0}$ e proviamo che esiste un intorno $V(\gamma)$ di γ in \mathcal{G}_{x_0} tale che la restrizione di \exp a $V(\gamma)$ è un'isometria su un intorno del punto $\exp(\gamma) = \gamma(1)$. Sia allora r un numero positivo tale che per ogni $t \in [0, 1]$ la palla chiusa $B(\gamma(t), r)$ sia completa e convessa. Definiamo $V(\gamma)$ come l'insieme delle geodetiche locali linearmente riparametrizzate $\eta: [0, 1] \rightarrow X$ appartenenti a \mathcal{G}_{x_0} tali che $d(\eta, \gamma) \leq r/2$. Per ogni η_1, η_2 in $V(\gamma)$ consideriamo la mappa $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $t \mapsto d(\eta_1(t), \eta_2(t))$. Come nel primo passo della dimostrazione del Lemma 2.11 si dimostra che tale mappa è convessa, e poiché $\eta_1(0) = \eta_2(0) = x_0$, essa assume massimo in 1. Dunque si ha

$$d(\eta_1, \eta_2) = \sup_{t \in [0,1]} d(\eta_1(t), \eta_2(t)) = d(\eta_1(1), \eta_2(1)) = d(\exp(\eta_1), \exp(\eta_2))$$

e la mappa esponenziale, ristretta all'intorno $V(\gamma)$, conserva le distanze. In particolare, tale restrizione è continua e bigettiva sull'immagine, ovvero un'isometria. Poiché ciò vale per ogni $\gamma \in \mathcal{G}_{x_0}$, e per il Lemma 2.11 la mappa esponenziale è suriettiva su $B(\gamma(1), r)$, \exp è un'isometria locale.

- iii. Ricordiamo che uno spazio localmente convesso è localmente unicamente geodetico. Poiché la mappa \exp è un'isometria locale, un cammino in \mathcal{G}_{x_0} è una geodetica locale se e solo se la sua immagine tramite la mappa esponenziale è una geodetica locale in X . L'applicazione $\tilde{c} \rightarrow \exp \circ \tilde{c}$, al variare di $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}_{x_0}$ tra tutte le geodetiche locali linearmente riparametrizzate in \mathcal{G}_{x_0} per cui $\tilde{c}(0) = \tilde{x}_0$ è dunque una bigezione con l'insieme delle geodetiche locali linearmente riparametrizzate $c: [0, 1] \rightarrow X$ tali che $c(0) = x_0$. Allora, per ogni $\gamma \in \mathcal{G}_{x_0}$, il cammino $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}_{x_0}$ definito da $\tilde{c}(s) = \rho_s(\gamma)$ è l'unica geodetica locale tra \tilde{x}_0 e γ .

□

Lemma 2.14. *Siano X uno spazio metrico ed x_0 un punto di X . Se la metrica su X è completa e localmente convessa, allora la metrica su \mathcal{G}_{x_0} è completa.*

Dimostrazione. Fissiamo una successione di Cauchy $\{c_n\}$ in \mathcal{G}_{x_0} . Poiché X è completo, per ogni $t \in [0, 1]$ le successioni di Cauchy $\{c_n(t)\}$ sono convergenti, diciamo ad un punto $c(t)$. Per il secondo punto del Lemma 2.11, le lunghezze $l(c_n)$ sono uniformemente limitate, e quindi il limite puntuale $t \rightarrow c(t)$ delle curve c_n è una geodetica locale. □

Corollario 2.15. *Sia X uno spazio metrico connesso ed $x_0 \in X$. Se la metrica su X è completa e localmente convessa, allora:*

1. *la mappa $\exp: \mathcal{G}_{x_0} \rightarrow X$ è un rivestimento, e, in particolare, \mathcal{G}_{x_0} è il rivestimento universale di X ;*
2. *esiste un'unica geodetica locale congiungente ogni coppia di punti di \mathcal{G}_{x_0} .*

Dimostrazione. Il primo punto segue dal Teorema 1.33 e dai lemmi precedenti. Per il secondo punto, vediamo prima che ogni cammino in X è omotopo, relativamente agli estremi, ad un'unica geodetica locale. Osserviamo subito che, poiché x_0 è un punto arbitrario di X , è sufficiente considerare cammini continui $c: [0, 1] \rightarrow X$ di punto iniziale x_0 . Fissiamo dunque un tale cammino c ; poiché \mathcal{G}_{x_0} è il rivestimento universale di X , l'insieme dei cammini in X che sono omotopi a c relativamente agli estremi, è in bigezione con l'insieme dei cammini in \mathcal{G}_{x_0} di punto base \tilde{x}_0 e punto finale dato da $\tilde{c}(1)$, dove \tilde{c} è l'unico sollevamento di c di punto iniziale \tilde{x}_0 . Si è visto che esiste un'unica geodetica locale linearmente riparametrizzata tra la mappa costante \tilde{x}_0 ed ogni punto di \mathcal{G}_{x_0} , dunque l'insieme dei cammini considerato contiene un'unica geodetica locale.

Siano ora p, q due punti in \mathcal{G}_{x_0} ; per semplice connessione, esiste un'unica classe di cammini tra p e q . La mappa esponenziale manda bigettivamente questa classe di cammini in un'unica classe di omotopia di cammini relativa agli estremi, e per l'argomento precedente questa deve contenere un'unica geodetica. Ciò dimostra che per ogni coppia di punti di \mathcal{G}_{x_0} esiste un'unica geodetica locale che li congiunge. □

Lemma 2.16. *Sia Y uno spazio di lunghezze semplicemente connesso la cui metrica è completa e localmente convessa. Supponiamo che per ogni coppia di punti p, q in Y esista un'unica locale geodetica $\gamma_{p,q}: [0, 1] \rightarrow Y$ che li connette. Se le geodetiche locali variano con continuità rispetto agli estremi allora:*

- i. ogni geodetica locale $\gamma_{p,q}$ è una geodetica;
- ii. la metrica su Y è convessa.

Dimostrazione. i. Sia $c: [0, 1] \rightarrow Y$ una curva rettificabile. Sia J il sottoinsieme di $[0, 1]$ dato dai numeri $t' \in [0, 1]$ tali che $l(\gamma_{c(0),c(t)}) \leq l(c|_{[0,t]})$ per ogni $t \leq t'$, che è non vuoto in quanto contiene 0. Mostriamo che J è chiuso; fissata una successione $\{t_i\}$ contenuta in J convergente a un certo \bar{t} , si ha che $l(\gamma_{c(0),c(t_i)}) \leq l(c|_{[0,t_i]})$, che per il punto (5) della Proposizione 1.12 tende a $l(c|_{[0,\bar{t}]})$. Applicando l'inferiore semicontinuità invece, si ha:

$$l(\gamma_{c(0),c(\bar{t})}) \leq \liminf l(\gamma_{c(0),c(t_i)}) \leq \liminf l(c|_{[0,t_i]}) = l(c|_{[0,\bar{t}]})$$

e quindi \bar{t} appartiene a J . Infine, se $t_0 \in J$ allora per il Lemma 2.11, per ε abbastanza piccolo si ha:

$$l(\gamma_{c(0),c(t_0+\varepsilon)}) \leq l(\gamma_{c(0),c(t_0)}) + d(c(t_0), c(t_0 + \varepsilon)) \leq l(c|_{[0,t_0]}) + l(c|_{[t_0,t_0+\varepsilon]}) = l(c|_{[0,t_0+\varepsilon]})$$

e quindi J è anche aperto, ovvero coincide con $[0, 1]$. Dal momento che il ragionamento prescinde dalla particolare curva c , si è dimostrato che per ogni curva rettificabile definita su $[0, 1]$ e per ogni $t \in [0, 1]$, si ha $l(\gamma_{c(0),c(t)}) \leq l(c|_{[0,t]})$, il che dimostra la tesi.

- ii. Abbiamo mostrato che Y è uno spazio completo unicamente geodetico. Per dimostrare che la metrica è convessa, ci basta dimostrare che, per ogni coppia di geodetiche γ_1, γ_2 linearmente riparametrizzate su $[0, 1]$ con stesso punto base, si ha $d(\gamma_1(1/2), \gamma_2(1/2)) \leq d(\gamma_1(1), \gamma_2(1))/2$.

È facile verificare che se vale questa proprietà della metrica, allora la stessa proprietà vale per geodetiche di diverso punto base (basta adattare in questo contesto la dimostrazione della Proposizione 2.1). A questo punto, per continuità, segue che la metrica d è una funzione convessa.

Supponiamo dunque che i punti finali di due geodetiche fissate $\gamma_{p,q_0}, \gamma_{p,q_1}$ siano connessi dalla geodetica linearmente riparametrizzata su $[0, 1]$, definita come $q(s) = q_s$. Per locale convessità, dal Lemma 2.11, si ha che per s ed s' abbastanza vicini, $d(\gamma_{p,q_s}(1/2), \gamma_{p,q_{s'}}(1/2)) \leq d(q_s, q_{s'})/2$. Partizionando $[0, 1]$, per compattezza esistono $0 = s_0 < \dots < s_n = 1$ tali che la disuguaglianza di sopra sia verificata per ogni coppia (s_i, s_{i+1}) . Infine, sommando otteniamo proprio la disuguaglianza cercata:

$$d\left(\gamma_{p,q_0}\left(\frac{1}{2}\right), \gamma_{p,q_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2}d(q_0, q_1).$$

□

Possiamo ora concludere la sezione con la dimostrazione del primo punto del Teorema di Cartan-Hadamard.

Dimostrazione del Teorema di Cartan-Hadamard (1).

Sia, come nelle ipotesi del teorema, X uno spazio metrico connesso e completo per cui la distanza sia una funzione localmente convessa e fissiamo un punto x_0 in X . Si è mostrato che la mappa esponenziale $\exp: \mathcal{G}_{x_0} \rightarrow X$ è un rivestimento. Sia allora d_R la metrica di lunghezze indotta su \mathcal{G}_{x_0} per sollevamento della metrica definita su X . Allora, per la Proposizione 1.32 la mappa \exp definita su (\mathcal{G}_{x_0}, d_R) è un'isometria locale.

Spostando l'attenzione sulla metrica d della convergenza uniforme, osserviamo che per quanto visto nel Lemma 2.13 la mappa esponenziale, definita su (\mathcal{G}_{x_0}, d) è un'isometria locale; poiché X è localmente convesso, anche (\mathcal{G}_{x_0}, d) risulta localmente convesso, quindi, applicando la Proposizione 2.5, si ha che ogni elemento di \mathcal{G}_{x_0} ha un intorno unicamente geodetico. Abbiamo inoltre osservato nel capitolo precedente che ogni spazio geodetico è anche uno spazio di lunghezze, dunque, in particolare (\mathcal{G}_{x_0}, d) è localmente uno spazio metrico di lunghezze. La metrica di lunghezze indotta, sia essa d_I , coincide localmente con la metrica d . Più precisamente, per ogni $p \in \mathcal{G}_{x_0}$ esiste un intorno U di p (rispetto alla topologia indotta da d) su cui $d = d_I$. Poiché $d_I \geq d$, U è un intorno di p anche rispetto a d_I . In particolare la topologia indotta da d e da d_I coincidono.

Ricapitolando, abbiamo definito su \mathcal{G}_{x_0} due metriche di lunghezze d_R, d_I per cui la mappa esponenziale è un'isometria locale. Ancora per la Proposizione 1.32 si ha che le due metriche coincidono. Allora il Lemma 2.13 ci assicura che la metrica di lunghezze che X induce su \mathcal{G}_{x_0} coincide con la metrica di lunghezze indotta dalla convergenza uniforme. Osserviamo che questa è ancora completa; infatti, avendosi sempre $d_I \geq d$, si ha che ogni successione di Cauchy per d_I è ancora una successione di Cauchy per d , che è completa.

Nel Corollario 2.15 si è anche mostrato che in \mathcal{G}_{x_0} esiste un'unica locale geodetica congiungente due punti fissati, e per il Lemma 2.11 tali geodetiche locali variano con continuità rispetto agli estremi.

Concludiamo la dimostrazione applicando il lemma precedente ad $Y = (\mathcal{G}_{x_0}, d_I)$: infatti lo spazio tangente è contraibile, quindi semplicemente connesso, con metrica di lunghezze completa e localmente convessa; quindi è unicamente geodetico e globalmente convesso. \square

2.4 Una caratterizzazione degli spazi $CAT(\kappa)$

Per concludere la dimostrazione del Teorema di Cartan-Hadamard ci serve un modo per "globalizzare" le relazioni di uno spazio localmente $CAT(\kappa)$. Daremo a questo scopo una definizione alternativa di spazio a curvatura non maggiore di κ , utilizzando

come strumento fondamentale la nozione di angolo. Abbiamo visto infatti, nel capitolo precedente, come si comportano i triangoli geodetici, almeno localmente, in uno spazio a curvatura non positiva; essi non sono più “spessi” dei rispettivi triangoli nel caso euclideo, e ciò fa pensare che gli angoli debbano essere più “piccoli”.

L’idea di Alexandrov è stata quella di mettere in relazione due segmenti geodetici fissati, e quindi l’angolo da essi definito, con i segmenti geodetici in \mathbb{E}^2 . Per farlo, utilizzeremo ancora i triangoli di confronto.

Definizione 2.17 (Angolo di confronto). Siano X uno spazio metrico e $\Delta(p, q, r) \subseteq X$ un triangolo geodetico. Sia $\bar{\Delta}(p, q, r)$ il triangolo di confronto in \mathbb{E}^2 . Chiamiamo *angolo di confronto* tra q ed r in p l’angolo interno a $\bar{\Delta}(p, q, r)$ in \bar{p} , e lo denotiamo con $\bar{\angle}_p(q, r)$.

Con la nozione di angolo di confronto, possiamo ora dare la definizione di angolo data da Alexandrov per uno spazio metrico:

Definizione 2.18 (Angolo di Alexandrov). Siano X uno spazio metrico e $c: [0, a] \rightarrow X$, $\bar{c}: [0, \bar{a}] \rightarrow X$ due geodetiche con stesso punto base. Fissati $t \in (0, a]$, $\bar{t} \in (0, \bar{a}]$, consideriamo il triangolo di confronto $\bar{\Delta}(c(0), c(t), \bar{c}(\bar{t}))$ e l’angolo di confronto $\bar{\angle}_{c(0)}(c(t), \bar{c}(\bar{t}))$. Chiamiamo *angolo di Alexandrov* tra le geodetiche c , \bar{c} , il numero $\angle_{c, \bar{c}} \in [0, \pi]$ definito da:

$$\angle(c, \bar{c}) = \limsup_{t, \bar{t} \rightarrow 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), \bar{c}(\bar{t})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < t, \bar{t} < \varepsilon} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), \bar{c}(\bar{t})).$$

Se il limite $\lim_{t, \bar{t} \rightarrow 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), \bar{c}(\bar{t}))$ esiste, diciamo che l’angolo di Alexandrov esiste in senso stretto.

Osservazione 2.19. Possiamo esprimere l’angolo di Alexandrov $\angle(c, \bar{c})$ in termini della sola distanza d ; per il Teorema di Carnot si ha infatti:

$$\cos(\bar{\angle}_{c(0)}(c(t), \bar{c}(\bar{t}))) = \frac{1}{2t\bar{t}}(t^2 + \bar{t}^2 - d(c(t), \bar{c}(\bar{t}))^2).$$

Notazione. Se X è uno spazio unicamente geodetico e x, y , sono due punti diversi da p , allora l’angolo tra i segmenti geodetici $[p, x]$ e $[p, y]$ sarà denotato con $\angle_p(x, y)$. Useremo la stessa notazione se non vi è ambiguità nella scelta delle geodetiche.

Chiamiamo *eccesso angolare* di un triangolo geodetico Δ , di angoli (di Alexandrov) interni α, β, γ , il numero

$$\delta(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Uno spazio geodetico X è allora uno spazio a curvatura non positiva se, per ogni punto di X , esiste un intorno aperto tale che ogni triangolo in quest’intorno ha eccesso angolare non positivo. Più precisamente, dimostreremo nella sezione il seguente teorema:

Teorema 2.20. *Se uno spazio geodetico X è uno spazio a curvatura non positiva allora ogni punto di X ha un intorno tale che, per ogni triangolo geodetico $\Delta(p, q, r)$ ivi contenuto, ed ogni triangolo di confronto $\bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ si ha:*

$$\angle_p(q, r) \leq \bar{\angle}_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r})$$

(ed analogamente per gli altri angoli).

Notiamo che, nel caso in cui lo spazio X è una superficie differenziabile, l'eccesso angolare $\delta(\Delta)$ di un triangolo geodetico non è altri che la curvatura totale, ovvero l'integrale della curvatura gaussiana di dominio la regione limitata dal triangolo geodetico Δ . Quindi, la nozione di spazio a curvatura non positiva generalizza la nozione classica di curvatura non positiva per superfici differenziabili.

Più in generale, vale una definizione di angolo di confronto per ogni varietà \mathcal{M}_κ^2 . Vediamo il caso $\kappa \leq 0$.

Sia A in \mathbb{H}^n , e fissiamo un vettore unitario u nell'ortogonale di A , ovvero $\langle u, u \rangle_{\mathbb{H}^n} = 1$ e $\langle u, A \rangle_{\mathbb{H}^n} = 0$. Sia $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ il cammino $c(t) = \cosh(t)A + \sinh(t)u$ e notiamo che il cammino così definito è proprio una geodetica. Dato $a \geq 0$, definiamo l'immagine tramite c dell'intervallo $[0, a]$ segmento iperbolico, e lo indichiamo con $[A, c(a)]$. Dato $B \in \mathbb{H}^n$ distinto da A , sia $v \in A^\perp$ un vettore unitario, che stia nella stessa retta determinata da $(B + \langle A, B \rangle_{\mathbb{H}^n} A)$. Questo è l'unico vettore in A^\perp per cui si abbia $B = \cosh(a)A + \sinh(a)v$, dove $a = d(A, B)$. Chiameremo v *vettore iniziale* del segmento iperbolico $[A, B]$. Chiamiamo *angolo iperbolico* tra due segmenti dello spazio iperbolico di stesso punto base e vettori iniziali u e v , l'unico numero reale $\alpha \in [0, \pi]$ tale che $\cos(\alpha) = \langle u, v \rangle$, dove il prodotto scalare è svolto in \mathbb{H}^n .

Definito l'angolo in \mathbb{H}^n , a meno di riscalare la metrica, abbiamo anche una definizione di angolo per \mathcal{M}_κ^n , sempre per $\kappa \leq 0$. Possiamo allora dare la nozione più generale di angolo di confronto:

Definizione 2.21 (κ -Angolo di confronto). Siano X uno spazio metrico e κ un numero reale non positivo. Fissati tre punti p, q, r in X chiamiamo κ -angolo di confronto tra q ed r in p , e lo denotiamo con $\angle_p^{(\kappa)}(q, r)$, l'angolo in \bar{p} del triangolo di confronto $\bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$ per (p, q, r) .

Resta da dimostrare l'equivalenza tra le due definizioni date di spazio a curvatura minore o uguale a $\kappa \leq 0$. Concludiamo dunque la sezione con questo risultato di equivalenza. Per farlo dimostreremo prima alcuni lemmi preliminari.

Lemma 2.22 (Lemma di Alexandrov). Siano a, b, b', c quattro punti distinti in \mathcal{M}_κ^2 , con $\kappa \leq 0$, e consideriamo i triangoli geodetici $\Delta = \Delta(a, b, c)$, $\Delta' = \Delta(a, b', c)$.

Supponiamo che b, b' giacciono su lati opposti rispetto alla geodetica tra a e c . Se α, β, γ (rispettivamente α', β', γ') sono gli angoli di Δ (rispettivamente Δ'), e sono tali che $\gamma + \gamma' \geq \pi$,

allora

$$d(b, c) + d(b', c) \leq d(b, a) + d(b', a).$$

Sia $\bar{\Delta}$ un triangolo in \mathcal{M}_κ^2 di vertici $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}'$, tali che $d(\bar{a}, \bar{b}) = d(a, b)$, e $d(\bar{a}, \bar{b}') = d(a, b')$. Siano \bar{c} un punto nella geodetica $[\bar{b}, \bar{b}']$ con $d(\bar{b}, \bar{c}) = d(b, c)$, e $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ gli angoli di $\bar{\Delta}$ nei vertici $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}'$; allora:

$$\bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha', \quad \bar{\beta} \geq \beta, \quad \bar{\beta}' \geq \beta', \quad d(a, c) \leq d(\bar{a}, \bar{c});$$

inoltre, ognuna di tali uguaglianze implica le altre, e sussiste se e solo se $\gamma + \gamma' = \pi$

Premettiamo una relazione fondamentale per la dimostrazione, nota come legge dei coseni:

Teorema dei coseni in \mathcal{M}_κ^n . Sia Δ un triangolo geodetico in \mathcal{M}_κ^n , con $\kappa \leq 0$, di vertici A, B, C . Sia $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ e $c = d(B, A)$. Se γ denota l'angolo al vertice in C , allora per κ negativo si ha:

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}c) = \cosh(\sqrt{-\kappa}a) \cosh(\sqrt{-\kappa}b) - \sinh(\sqrt{-\kappa}a) \sinh(\sqrt{-\kappa}b) \cos(\gamma),$$

mentre per $\kappa = 0$ vale il noto Teorema di Carnot.

Dimostrazione. Vediamo solo il caso in cui $\kappa < 0$.

Dimostriamo la legge dei coseni per lo spazio iperbolico, da cui otteniamo la legge generale per $\kappa < 0$ riscalandolo.

Siano allora u e v i vettori iniziali dei segmenti iperbolici $[C, A]$ e $[C, B]$. Per definizione di angolo iperbolico, $\cos(\gamma) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^n}$, e

$$\cosh(c) = -\langle A, B \rangle_{\mathbb{H}^n}.$$

Per definizione di segmenti iperbolici invece si ha

$$\langle A, B \rangle_{\mathbb{H}^n} = \langle \cosh(b)C + \sinh(b)u, \cosh(a)C + \sinh(a)v \rangle_{\mathbb{H}^n}$$

da cui, svolgendo i prodotti otteniamo la tesi:

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

□

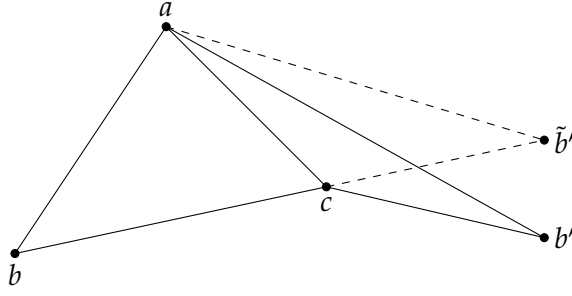


Figura 2.2: Lemma di Alexandrov.

Dimostrazione. Sia \tilde{b}' l'unico punto di \mathcal{M}_κ^2 per cui $d(\tilde{b}', c) = d(b', c)$ e c giaccia sull'unico segmento geodetico tra \tilde{b}' e b , come mostrato in Figura 2.2. Per ipotesi $\gamma + \gamma' \geq \pi$, e l'angolo tra le geodetiche $[c, a]$ e $[c, \tilde{b}']$ non è più grande dell'angolo tra le geodetiche $[c, a]$ e $[c, b']$. Quindi, per la legge dei coseni in \mathcal{M}_κ^n , si ha:

$$d(b, a) + d(b', a) \geq d(b, a) + d(\tilde{b}', a) \geq d(b, \tilde{b}') = d(b, c) + d(c, \tilde{b}') = d(b, c) + d(c, b').$$

Ciò conclude la prima parte della dimostrazione.

Seguendo lo stesso ragionamento della prima parte, si ottiene che $d(\bar{a}, \bar{b}') \geq d(a, \tilde{b}')$, e per la disuguaglianza CAT(κ), $d(\bar{b}, \bar{b}') \geq d(b, b')$; in ambo i casi le disuguaglianze sono strette, a meno di avere $c \in [b, b']$, ovvero $\gamma + \gamma' = \pi$. Applicando la legge dei coseni ad ogni disuguaglianza, otteniamo che $\bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha'$ e $\bar{\beta} \geq \beta$. Scambiando i ruoli di β e β' , otteniamo anche $\bar{\beta}' \geq \beta'$.

Tutte queste disuguaglianze sono strette, ad esclusione del caso $\gamma + \gamma' = \pi$, caso in cui $\bar{\Delta}$ è isometrico all'unione di Δ e Δ' , con il lato in comune $[a, c]$ rimosso, e quindi valgono tutte le uguaglianze. \square

Proposizione 2.23. *Siano $\kappa \leq 0$ ed X uno spazio geodetico. Le seguenti condizioni sono allora equivalenti:*

1. X è uno spazio CAT(κ);
2. per ogni triangolo geodetico $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$ in X , e per ogni punto $x \in [q, r]$, è soddisfatta la disuguaglianza

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x})$$

dove $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}]$ è il punto di confronto per x ;

3. per ogni triangolo geodetico $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$ in X ed ogni coppia di punti $x \in [p, q]$, $y \in [p, r]$ entrambi distinti da p , gli angoli al vertice corrispondenti a p nei triangoli di confronto $\bar{\Delta}(p, q, r)$ e $\bar{\Delta}(p, x, y)$ soddisfano la disuguaglianza:

$$\angle_p^{(\kappa)}(x, y) \leq \angle_p^{(\kappa)}(q, r);$$

4. *l'angolo di Alexandrov tra i lati di ogni triangolo geodetico in X con vertici distinti non è più grande dell'angolo tra i lati corrispondenti del triangolo di confronto in \mathcal{M}_κ^2 .*

Dimostrazione. È chiaro che (1) implica (2) e che (4) segue da (3). Proviamo allora che (1) e (3) sono equivalenti, che (2) implica (3) e infine (4) implica (2).

(1) \Leftrightarrow (3) Siano p, q, r, x, y come in (3) e chiamiamo \bar{z} i punti di confronto in $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$, \bar{z}' i punti di confronto per $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(p, x, y)$. Consideriamo gli angoli $\bar{\alpha} = \angle_p^{(\kappa)}(q, r)$ e $\bar{\alpha}' = \angle_p^{(\kappa)}(x, y)$. Per il teorema dei coseni, $\bar{\alpha}' \leq \bar{\alpha}$ se e solo se vale $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq d(x, y) = d(\bar{x}', \bar{y}')$. Ma allora (1) è equivalente a (3).

(2) \Rightarrow (3) Utilizziamo la stessa notazione dell'equivalenza precedente. Sia $\Delta(\bar{p}'', \bar{x}'', \bar{r}'') \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$ un triangolo di confronto per $\Delta(p, x, r)$ e chiamiamo $\bar{\alpha}''$ l'angolo al vertice in \bar{p}'' . Per (2) si ha $d(x, y) \leq d(\bar{x}'', \bar{y}'')$, dove $\bar{y}'' \in [\bar{p}'', \bar{r}'']$ è il punto di confronto per y . Ma $d(\bar{x}', \bar{y}') = d(x, y)$, e quindi, per il teorema dei coseni, $\bar{\alpha}' \leq \bar{\alpha}''$. Ancora per (2), $d(\bar{x}, \bar{r}) \geq d(x, r) = d(\bar{x}'', \bar{r}'')$, ovvero $\bar{\alpha}'' \leq \bar{\alpha}$. Quindi $\bar{\alpha}' \leq \bar{\alpha}$.

(4) \Rightarrow (2) Fissiamo un triangolo geodetico $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$ in X , un punto $x \in [q, r]$ distinto da q ed r , ed un segmento geodetico $[p, x]$. Siano γ, γ' gli angoli al vertice x rispettivamente dei triangoli $\Delta([p, q], [q, x], [x, p])$ e $\Delta([p, x], [x, r], [r, p])$, e sia β l'angolo in q . Fissiamo i triangoli di confronto $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}), \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{x}), \Delta'(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$, e denotiamo con $\bar{\beta}$ l'angolo al vertice \bar{q} . Scegliamo tali triangoli di confronto in modo tale che il segmento $[\bar{p}, \bar{x}]$ sia in comune, e \bar{q}, \bar{r} siano opposti rispetto a questo. Siano infine $\tilde{\gamma} = \angle_{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})$ e $\tilde{\beta} = \angle_{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{x})$.

Sfruttando il fatto che $[q, r]$ è una geodetica, è facile verificare che la somma degli angoli γ e γ' non è minore di π , quindi per (4) anche la somma tra $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}'$ non è minore di π . Per il lemma di Alexandrov si ha allora anche $\tilde{\beta} \leq \bar{\beta}$. Applicando infine il teorema dei coseni si ha dunque $d(\bar{p}, \bar{x}) \geq d(\bar{p}, \bar{x}) = d(p, x)$, ovvero la tesi.

□

2.5 Il patchwork di Alexandrov

Nella seguente sezione dimostreremo il secondo punto del Teorema di Cartan-Hadamard. L'idea della dimostrazione è contenuta nella Figura 2.3; infatti, sappiamo che in uno spazio a curvatura non positiva le relazioni $\text{CAT}(\kappa)$ valgono solo localmente, quindi cercheremo di suddividere un triangolo geodetico Δ in triangoli geodetici più piccoli per cui valgano le relazioni della Proposizione 2.23.

La dimostrazione seguirà dai seguenti risultati:

Lemma 2.24 (Lemma di incollamento per triangoli). *Sia κ un numero reale non positivo, e sia X uno spazio metrico geodetico. Fissato un triangolo geodetico $\Delta = \Delta([p, q_1], [p, q_2], [q_1, q_2])$*

in X i cui vertici siano tutti distinti, consideriamo $r \in (q_1, q_2)$ e chiamiamo $[p, r]$ un segmento geodetico tra p ed r .

Per $\Delta_i([p, q_i], [p, r], [q_i, r])$ fissiamo in \mathcal{M}_κ^2 un triangolo di confronto $\bar{\Delta}_i$, con $i = 1, 2$. Se per $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ gli angoli al vertice non sono più piccoli dei rispettivi angoli in Δ_i , allora vale lo stesso risultato per gli angoli di ogni triangolo di confronto per Δ in \mathcal{M}_κ^2 .

Dimostrazione. Siano $\Delta_1(\bar{p}, \bar{q}_1, \bar{r})$ e $\Delta_2(\bar{p}, \bar{q}_2, \bar{r})$ i triangoli di confronto in \mathcal{M}_κ^2 per Δ_1, Δ_2 incollati lungo il segmento geodetico $[\bar{p}, \bar{r}]$, in modo tale che q_1 e q_2 non giacciono dalla stesso lato. La somma degli angoli al vertice r per Δ_1 e Δ_2 è almeno π , così come la somma dei rispettivi angoli di confronto. La tesi segue dunque dal Lemma di Alexandrov. \square

Lemma 2.25. *Siano $\kappa \leq 0$ ed X uno spazio a curvatura non maggiore di κ . Sia $q: [0, 1] \rightarrow X$ una geodetica linearmente riparametrizzata tra i punti distinti $q(0) = q_0$ e $q(1) = q_1$, e sia p un punto di X che non appartiene all'immagine di q .*

Assumiamo che per ogni $s \in [0, 1]$ esista una geodetica linearmente riparametrizzata $c_s: [0, 1] \rightarrow X$ che congiunge p a $q(s)$, e che l'associazione $s \mapsto c_s$ sia continua. Allora gli angoli in p, q_0, q_1 del triangolo geodetico Δ di lati $c_0([0, 1]), c_1([0, 1])$ e $q([0, 1])$ non sono più grandi dei rispettivi angoli di confronto in $\bar{\Delta} \subseteq \mathcal{M}_\kappa^2$.

Dimostrazione. Per ipotesi lo spazio X è localmente $\text{CAT}(\kappa)$, quindi per ogni punto esiste un intorno che, con la metrica indotta, è uno spazio $\text{CAT}(\kappa)$. Sia $c: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ la mappa continua definita come $c(s, t) = c_s(t)$. Per compattezza esiste una partizione di $[0, 1] \times [0, 1]$ data da $0 = s_0 < \dots < s_k = 1, 0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ tale che, per ogni i, j esiste una palla aperta $U_{i,j}$ che è uno spazio $\text{CAT}(\kappa)$ e contiene $c([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$.

Consideriamo la sequenza di triangoli contigui $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, dove Δ_i è l'unione dei segmenti geodetici $c_{s_{i-1}}([0, 1]), c_{s_i}([0, 1])$ e $q([s_{i-1}, s_i])$. Nel caso in cui gli angoli al vertice dei Δ_i non sono più grandi dei rispettivi angoli nei triangoli di confronto $\bar{\Delta}_i$, un utilizzo iterato del lemma di incollamento per i triangoli ci permette di concludere la dimostrazione.

Proviamo allora che il lemma vale per i triangoli Δ_i . A questo scopo suddividiamo ancora tali triangoli come mostrato in Figura 2.3. Per ogni i consideriamo infatti la sequenza di triangoli adiacenti $\Delta_i^1, \Delta_i^2, \tilde{\Delta}_i^2, \dots, \Delta_i^k, \tilde{\Delta}_i^k$, dove Δ_i^1 è il triangolo geodetico in $U_{1,1}$, di vertici $p, c_{s_{i-1}}(t_1), c_{s_i}(t_1)$, Δ_i^j è il triangolo geodetico in $U_{i,j}$ di vertici $c_{s_{i-1}}(t_{j-1}), c_{s_i}(t_{j-1}), c_{s_i}(t_j)$, e, infine, $\tilde{\Delta}_i^j$ è il triangolo geodetico in $U_{i,j}$ di vertici $c_{s_{i-1}}(t_j), c_{s_i}(t_{j-1}), c_{s_i}(t_j)$.

Poiché $U_{i,j}$ è uno spazio $\text{CAT}(\kappa)$, ogni angolo al vertice in ogni triangolo così costruito, non è più grande del rispettivo angolo di confronto. Iterando ancora il lemma di incollamento per i triangoli abbiamo finalmente la tesi. \square

Proposizione 2.26 (Patchwork di Alexandrov). *Sia X uno spazio metrico unicamente geodetico a curvatura minore o uguale a $\kappa \leq 0$. Se tali geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi, allora X è uno spazio $\text{CAT}(\kappa)$.*

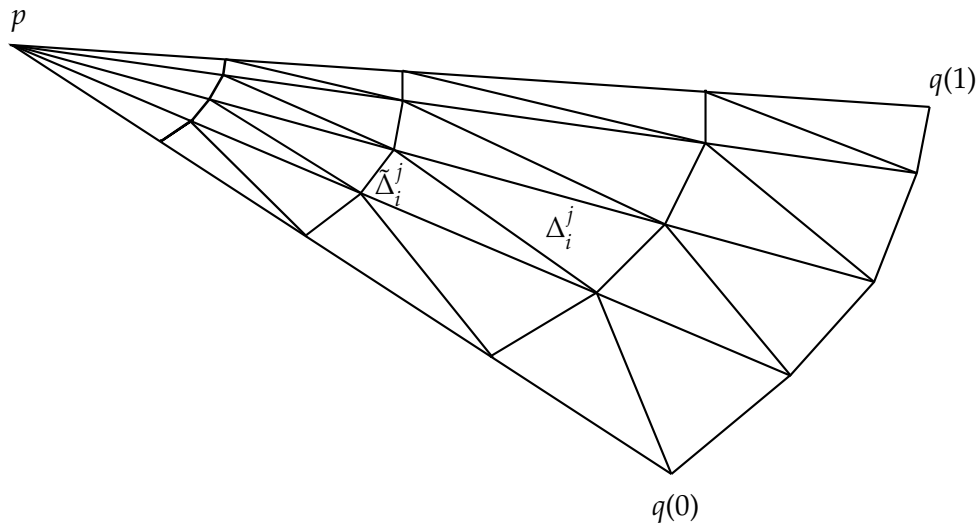


Figura 2.3: Patchwork di Alexandrov.

Dimostrazione. Per la caratterizzazione degli spazi $CAT(\kappa)$ in termini di angoli data nella Proposizione 2.23, possiamo notare che la tesi discende subito dai lemmi precedenti. \square

Dal Patchwork di Alexandrov deriva immediatamente il secondo punto del Teorema di Cartan-Hadamard. Un'altra interessante conseguenza risiede nel seguente corollario:

Corollario 2.27. *Siano $\kappa \leq 0$ e X uno spazio metrico proprio a curvatura minore o uguale a κ . Allora X è uno spazio $CAT(\kappa)$ se e solo se ogni coppia di punti può essere connessa da un'unica geodetica.*

Dimostrazione. Si è già dimostrato che ogni spazio $CAT(\kappa)$, per $\kappa \leq 0$, è uno spazio unicamente geodetico.

Viceversa, per il Corollario 1.27 le geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi, e per il Patchwork di Alexandrov X è uno spazio $CAT(\kappa)$. \square

Capitolo 3

Applicazioni topologiche

Concludiamo la tesi con alcune applicazioni topologiche del Teorema di Cartan-Hadamard, concernenti le ostruzioni che la curvatura impone sulla topologia dello spazio.

3.1 Gruppo fondamentale e dimensione di spazi $\text{CAT}(\kappa)$

Un corollario immediato al Teorema di Cartan-Hadamard è il seguente:

Proposizione 3.1. \mathbb{S}^n non ammette metriche localmente $\text{CAT}(0)$.

Dimostrazione. Se \mathbb{S}^n ammettesse metriche localmente $\text{CAT}(0)$ allora il suo rivestimento universale sarebbe contraibile. Ma \mathbb{S}^n coincide con il proprio rivestimento universale e il gruppo $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, per cui \mathbb{S}^n non è contraibile. \square

Osserviamo che, in particolare, \mathbb{S}^n non ammette metriche localmente piatte.

Nella Proposizione 2.1 abbiamo dimostrato che in uno spazio $\text{CAT}(0)$ la metrica è una funzione convessa, mentre nel Teorema 1.42 abbiamo affermato che ogni spazio $\text{CAT}(\kappa)$ per κ non positivo è anche uno spazio $\text{CAT}(0)$. Quindi, fissato uno spazio metrico (X, d) che sia localmente $\text{CAT}(\kappa)$ per il Teorema di Cartan-Hadamard, sappiamo che X ammette rivestimento universale contraibile. Ciò implica che lo spazio X è asferico, con tutti i gruppi di omotopia superiori al primo banali. Ricordiamo infatti il seguente risultato di topologia:

Proposizione 3.2. Un rivestimento $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ induce per ogni $n \geq 2$ un isomorfismo $p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$.

Dimostrazione. Sia f un rappresentante in $\pi_n(X, x_0)$; per il teorema del sollevamento di applicazioni, poiché $\pi_1(\mathbb{S}^n, s_0)$ per $n \geq 2$ è banale, si ha il seguente diagramma

commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (S^n, s_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

con \tilde{f} sollevamento di f . La classe $[\tilde{f}]$ è tale che $p_*[\tilde{f}] = [p\tilde{f}] = [f]$, ovvero p_* è surgettiva. Sia ora \tilde{f}_0 tale che $p_*[\tilde{f}_0] = f_0$ è omotopo alla mappa costante, con omotopia F . Per il teorema di sollevamento dell'omotopia F si solleva a omotopia \tilde{F} tra \tilde{f}_0 e un sollevamento della mappa costante, che è ancora costante. Dunque p_* è anche iniettiva, ovvero è un isomorfismo. \square

Nota. Uno spazio connesso per archi di gruppo fondamentale G e gruppi di omotopia superiori al primo tutti nulli è chiamato *spazio* $K(G, 1)$.

Non è difficile costruire uno spazio $K(G, 1)$ per un arbitrario gruppo G , ma la proprietà più interessante di tali spazi è data dalla seguente forma di unicità:

Teorema 3.3. *Un CW-complesso che sia un $K(G, 1)$ è unico a meno di omotopia, ed è completamente determinato da G .*

Per il teorema precedente tutti gli invarianti di omotopia di un $K(G, 1)$, quali ad esempio i gruppi di omologia e coomologia, dipendono solo da G

Se indichiamo dunque con π il gruppo fondamentale di un CW-complesso X , che sia anche uno spazio localmente $CAT(\kappa)$ con κ non positivo, allora dalla proposizione precedente si ha che X ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio $K(\pi, 1)$.

Poiché ogni varietà compatta è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso, il Teorema di Cartan-Hadamard implica il seguente risultato:

Teorema 3.4. *Siano M ed N due varietà compatte (quindi complete) che ammettono una metrica localmente $CAT(0)$. Se $\pi_1(M) \simeq \pi_1(N)$ allora $\dim(M) = \dim(N)$.*

Dimostrazione. Per le osservazioni precedenti le varietà M ed N sono omotopicamente equivalenti; dunque i rispettivi gruppi di omologia sono isomorfi, ovvero $H_n(M, \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(N, \mathbb{Z}_2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se le varietà avessero dimensione diversa, diciamo \bar{m} ed \bar{n} rispettivamente, con $\bar{n} > \bar{m}$, allora si avrebbe $H_{\bar{n}}(M, \mathbb{Z}_2) \simeq 0$, mentre $H_{\bar{n}}(N, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Dunque le varietà devono avere la stessa dimensione. \square

Corollario 3.5. *Siano M ed N due varietà compatte, con M localmente $CAT(0)$ ed N semplicemente connessa. Allora $M \times N$ non ammette metriche localmente $CAT(0)$.*

3.2 Il centro di un insieme limitato

In questa sezione diamo un'idea di come applicare le proprietà degli spazi CAT(0) per ottenere risultati di struttura per il gruppo fondamentale di uno spazio a curvatura non positiva.

Ricordiamo che, dato un insieme limitato Y in uno spazio metrico X , il *raggio* di Y è definito come l'estremo inferiore dei numeri positivi r tali che $Y \subseteq B(x, r)$ per qualche $x \in X$.

Proposizione 3.6. *Sia X uno spazio metrico completo che sia anche CAT(κ) per $\kappa \leq 0$. Se $Y \subseteq X$ è un insieme limitato di raggio r_Y , allora esiste un unico punto $c_Y \in X$, chiamato centro di Y , tale che $Y \subseteq \bar{B}(c_Y, r_Y)$.*

Dimostrazione. Fissiamo una successione di punti $\{x_n\}$ in X tali che $Y \subseteq B(x_n, r_n)$, con gli r_n tendenti a r_Y per n tendente ad infinito. Se mostriamo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, dalla completezza di X segue la tesi. Infatti, per completezza, la successione avrà un punto limite, che sarà proprio il centro cercato. Inoltre tale centro deve essere unico: supponiamo infatti che esista un altro punto c'_Y che, come c_Y è un centro per Y ; allora esisterà una successione $\{x'_n\}$ che vi converge, e considerando la successione

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_n & \text{per } n \text{ pari} \\ x'_n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

abbiamo un assurdo; infatti la successione $\{\tilde{x}_n\}$ dovrebbe essere di Cauchy in quanto costituita da punti tali che $Y \subseteq \bar{B}(\tilde{x}_n, \tilde{r}_n)$, con \tilde{r}_n convergente a r_Y . Tuttavia, una successione che contenga due sottosuccessioni convergenti a punti distinti non può essere una successione di Cauchy.

Mostriamo allora che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Fissiamo un punto base O in \mathcal{M}_κ^2 e, dato $\varepsilon > 0$, scegliamo due numeri $R > r_Y$, $R' < r_Y$ tali che ogni segmento geodetico interamente contenuto nella corona circolare $A = B(O, R) - B(O, R')$ abbia lunghezza minore di ε . Per n, n' sufficientemente grandi, abbiamo certamente che r_n , ed $r_{n'}$ sono minori di R . Sia m il punto medio dell'unica geodetica tra x_n e $x_{n'}$. Allora per ogni $y \in Y$ possiamo considerare il triangolo di confronto $\bar{\Delta}_y = \Delta(O, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n'})$ per $\Delta(y, x_n, x_{n'})$.

Se per ogni $y \in Y$ il punto medio della geodetica $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n'}] \subseteq \bar{\Delta}_y$ appartenesse alla palla $B(O, R')$, allora per la disuguaglianza CAT(κ) si avrebbe

$$d(m, y) \leq d(\bar{m}, O) < R'$$

per ogni $y \in Y$, ovvero $Y \subseteq B(m, R')$, contraddicendo il fatto che R' è più piccolo di r_Y . Allora esiste un punto $y \in Y$ per cui il punto medio di $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n'}] \subseteq \bar{\Delta}_y$ appartiene ad A . Ciò implica che almeno mezza geodetica giace in A , e quindi $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n'}]$ ha lunghezza minore di 2ε , da cui $d(x_n, x_{n'}) = d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n'}) = 2\varepsilon$. \square

Osservazione 3.7. Siano X uno spazio di lunghezze e $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento che sia anche una isometria locale. Allora ogni automorfismo di rivestimento è anche un'isometria.

Corollario 3.8. *Siano X uno spazio metrico connesso e completo, a curvatura non positiva, ed $x_0 \in X$ un punto fissato. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ non ha torsione.*

Dimostrazione. Sia $p: \tilde{X} \rightarrow X$ il rivestimento universale di X ; allora il gruppo fondamentale di X coincide con il gruppo degli automorfismi di \tilde{X} . Inoltre, per l'osservazione precedente, ogni elemento di $\text{Aut}(\tilde{X})$ è un'isometria.

Supponiamo allora che esista $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ di periodo finito e sia

$$F = \{x_0, \gamma(x_0), \dots, \gamma^n(x_0) = x_0\}$$

l'orbita di x_0 , dove $x_0 \in X$ è un punto base.

Per il Teorema di Cartan-Hadamard il rivestimento universale \tilde{X} è uno spazio $\text{CAT}(0)$, quindi F ammette un unico centro c . Poiché γ è un'isometria, il centro di F è lasciato fisso, e dunque $\gamma(c) = c$.

Poiché il gruppo fondamentale agisce in modo libero, l'unico elemento di $\pi_1(X, x_0)$ che ammette un punto fisso è l'identità. Ma allora γ è l'elemento identico di $\pi_1(X, x_0)$, e quindi il gruppo fondamentale di X non ha torsione. \square

Concludiamo con un'applicazione del corollario precedente.

Esempio 3.9. Consideriamo lo spazio proiettivo infinito reale $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ dotato della topologia debole indotta dalla realizzazione come CW-complesso. È noto che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ è isomorfo a \mathbb{Z}_2 , e che $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$, pur non essendo metrizzabile, può essere dotato di metriche che non ne cambiano il tipo omotopico. In particolare, le metriche appena citate rendono comunque $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ uno spazio asferico. Per ciascuna di queste metriche si ha $\pi_1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\pi_n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})) = 0$ per ogni $n \geq 2$; dunque, avendo torsione, concludiamo che tale spazio non ammette metriche localmente $\text{CAT}(0)$.

Osserviamo che non si poteva concludere applicando direttamente il Teorema di Cartan-Hadamard.

Bibliografia

- [1] S. B. Alexander, R. L. Bishop, *The Cartan-Hadamard Theorem in locally convex spaces*, Enseign. Math. 36 (1990), 309-320.
- [2] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, 1999.
- [3] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 33. American Mathematical Society, 2001.
- [4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press 2001.
- [5] M. Manetti, *Topologia*. Springer 2008.
- [6] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 6, Eur. Math. Soc., 2005.